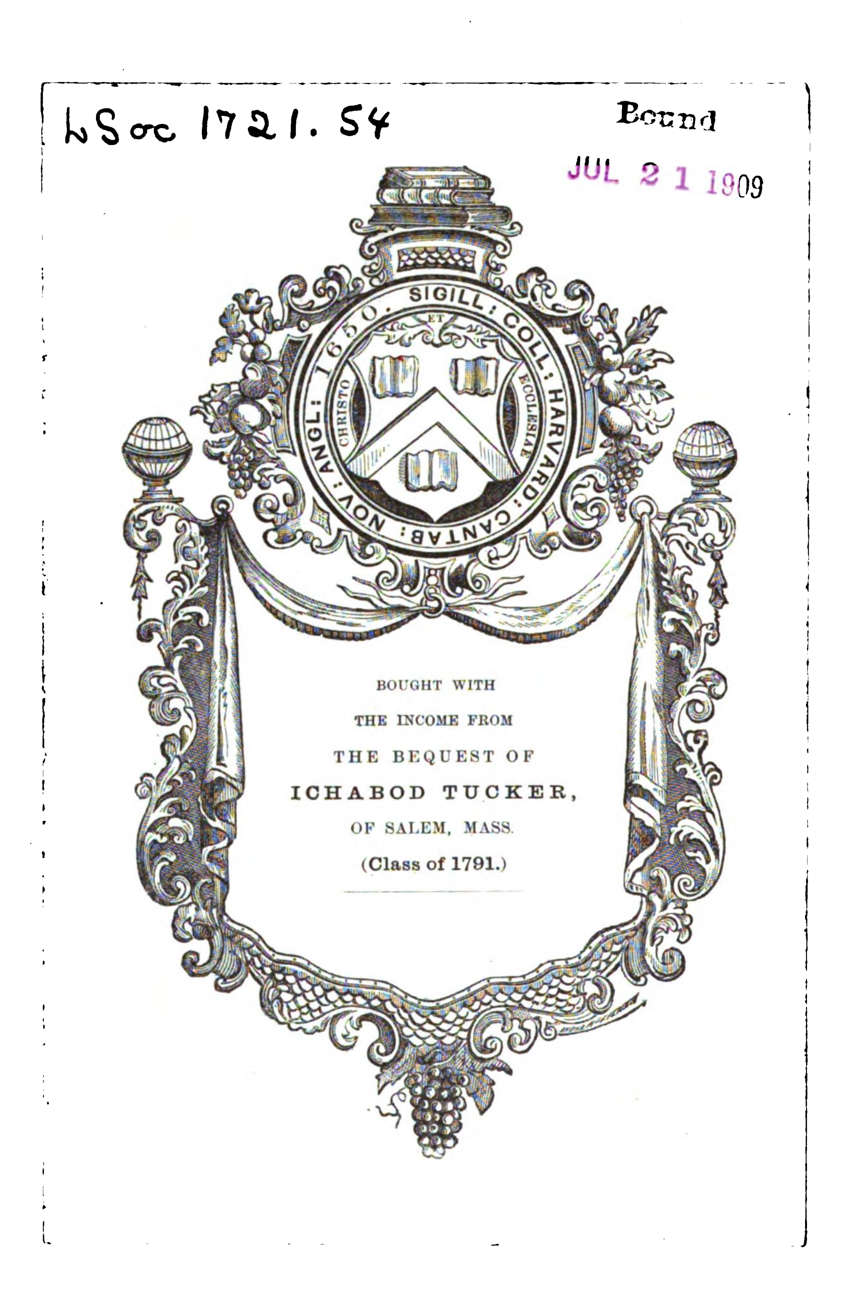

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
ICHABOD TUCKER,
OF SALEM, MASS.
(Class of 1791.)

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1908.

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1908.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner)
in Göttingen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1908.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1908. Heft 1.

Inhalt:

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1908.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ordentliche Sitzung am 22. Februar 1908.

A. Peter, Zur Systematik einiger Pflanzenarten aus Brasilien. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

D. Hilbert legt wor:

M. Dehn, Ueber dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

P. Koebe, Ueber ein iterierendes Verfahren. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

E. Schwartz, Aporien zum vierten Evangelium. III. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

W. Meyer, Das erste Gedicht der carmina Burana. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

G. Körte, Das Volumniergrab bei Perugia. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

Ordentliche Sitzung am 7. März 1908.

F. Frensdorff, Von und über Schlözer. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

R. Pietschmann legt Berichte des Direktors des archaeologischen Instituts zu Kairo, Professor Dr. L. Borchhardt, über Ausgrabungen in Aegypten vor.

E. Wiechert legt vor:

F. Linke und O. Tetens, Ergebnisse des Samoa-Observatoriums. Die meteorologischen Registrierungen.

K. Zoeppritz, Seismische Registrierungen in Göttingen während des Jahres 1906.

K. Zoeppritz, Ueber die Amplitude der sogenannten ersten Vorläufer in Erdbeben und über einige Beobachtungen von Erdbebenwellen.

Ordentliche Sitzung am 21. März 1908.

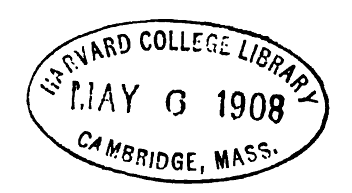
E. Riecke legt vor: Ragnar Holm, Experimentelle Untersuchungen über die geschichtete positive Glimmlichtsäule, insbesondere über das Schichtenpotential in Wasserstoff, Stickstoff und Helium. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

F. Klein legt vor: W. Fr. Meyer (Königsberg), Ueber die Erzeugung linearer ternärer Substitutionen aus einer geringsten Anzahl von Fundamentalsubstitutionen. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: Mathematische Encyclopädie. IV. 1. 4.

Fortsetzung auf der 3. Umschlagseite.





Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XIX.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Februar 1908.

I. Ueber Bindungsauflösung unter Wasseraddition bei Terpenverbindungen.

Der Hydratationsvorgang ist eine der längst bekannten Erscheinungen, welche man bei Terpenverbindungen beobachtet hat. Die Überführung von Pinen in Terpineol und in Terpin, von Kampfer in Isoborneol, die Möglichkeit von Verbindungen wie Bihydrocarveol, Bihydrocarvon, Carvon durch Behandlung mit Säuren Wasser anzulagern: das alles sind allgemein bekannte Reaktionen.

Trotzdem fehlt es aber völlig an systematischen Versuchen, welche über den Verlauf solcher Wasseradditionen und namentlich über die wechselnde Leichtigkeit, mit der sie bei verschieden gebauten Verbindungen erfolgt, Rechenschaft geben könnten.

Solche Versuche waren allerdings auch nicht eher von aktueller Bedeutung, bis in Verbindungen von genügend aufgeklärter Struktur geeignetes Beobachtungsmaterial vorlag.

Das ist nun jetzt der Fall und ich möchte nachstehend eine Gruppe von Beobachtungen über den Verlauf der Hydratation mitteilen, zu deren richtiger Deutung Folgendes vorauszuschicken ist.

Die Versuche hatten zum Zweck verschiedene Verbindungen bezüglich ihrer Fähigkeit, Wasser additionell aufnehmen zu können,

zu vergleichen. Daher mußten sie unter möglichst gleichen Bedingungen angestellt werden. Als Hydratationsmittel wurde wässerige Schwefelsäure in großer Verdünnung (3—5 %) gewählt und die Reaktion bei gewöhnlicher Temperatur durchgeführt. Hochprozentige Säure und Erwärmen wurde vermieden, da unter diesen Verhältnissen die Schwefelsäure bekanntlich auch Wasser abspaltend wirkt und daher einerseits die Reaktion rückläufig werden, andererseits sie das Eintreten von Isomerisationen erleichtern kann.

Die verdünnte Säure wurde gegenüber der zur Verwendung kommenden Substanz im großen Volumüberschuß gewählt. Das Gemisch wurde auf der Schüttelmaschine, je nachdem, Stunden oder Tage lang durchgeschüttelt. Dann wurde das Produkt unter Abkühlung durch vorsichtige Neutralisation mit Alkali von der Säure befreit. Falls daß angewandte Material mit Wasserdampf flüchtig ist, dagegen das Hydratationsprodukt nicht, so ist die Trennung sehr einfach. Man entfernt eben das unveränderte Material durch Dampfdestillation und extrahiert den Rückstand. Sind beide Produkte flüchtig, so führt fraktionierte Dampfdestillation und darauf folgende Rektifikation des getrockneten Materials zum Ziel. Bei nicht flüchtigen Verbindungen ist der Weg der fraktionierten Kristallisation, bezw. Extraktion einzuschlagen.

Eine gewisse Ungleichheit der Versuchsbedingungen läßt sich insofern überhaupt nicht vermeiden, als die Löslichkeit der verschiedenen zur Anwendung kommenden Verbindungen in verdünnter Schwefelsäure häufig verschieden ist und diese verschiedene Löslichkeit die Wasseraufnahme erleichtern oder erschweren kann. Daß die Löslichkeit aber keineswegs ein allein ausschlaggebendes Moment bei der Wasseraufnahme vorstellt, geht schon daraus hervor, daß in Wasser ziemlich gleich unlösliche Kohlenwasserstoffe, wie z. B. Pinen und Sabinen sich gegen den Einfluß der Säuren doch ganz verschieden verhalten und daß umgekehrt bei Verbindungen, bei denen man das Eintreten einer Hydratation hätte bestimmt erwarten sollen (z. B. Nopinol), trotz ihrer Löslichkeit in verdünnter Schwefelsäure eine Wasseraufnahme doch nicht eintritt.

Als sehr beachtenswertes Resultat der folgenden Versuche hat sich ergeben, daß der eigentlichen Hydratation in manchen Fällen eine Bindungsverschiebung vorhergeht. Das erläutern folgende Beispiele: Sabinenhydrat gibt unter Wasseraufnahme Terpinenterpin, aber nicht direkt, sondern als isolierbares primäres Produkt erhält man aktives Terpinenol (4):

CH_3 OH → CH_3 → CH_3 OH

OH

C_3H_7 C_3H_7 C_3H_7 OH

Sabinenhydrat Terpinenol Terpin (Smp. 137°).

Entsprechend liefert Pinenhydrat nicht unter Ringsprengung und Wasseraufnahme direkt cis-Terpin, sondern primär entsteht aktives α-Terpineol:

CH_3 OH → CH_3 → CH_3 OH

CH_3

H_3C

$COH(CH_3)_2$ $COH(CH_3)_2$.

Pinenhydrat α-Terpineol Terpin (Smp. 117°).

Diese Beobachtungen waren sehr überraschend, denn man hätte annehmen sollen, daß bei der Wasseraddition an die genannten gesättigten bicyclischen Alkohole der Drei- bezw. Vierring unter Aufnahme von HOH einfach gelöst werden würde und das Produkt müßte dann gleich im ersten Schritt ein unter den gegebenen Bedingungen beständiges inaktives Glycol sein.

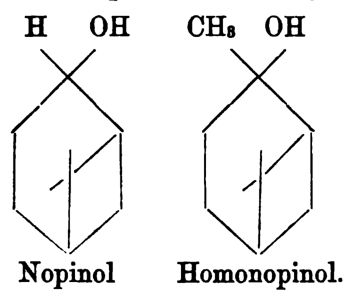
Daß die Reaktion nicht so verläuft, sondern daß intermediär die Bildung der eben bezeichneten aktiven ungesättigten Alkohole[1]) einsetzt, scheint mir nun für das richtige Verständnis dieser und einiger verwandter Vorgänge sehr wesentlich zu sein. Es geht daraus nämlich deutlich hervor, daß die gesättigten Alkohole, Sabinenhydrat und Pinenhydrat in Berührung mit, selbst sehr verdünnter, kalter Säure zunächst 1 Mol. Wasser abspalten und zwar deshalb, weil die OH-Gruppe besonders leicht mit dem tertiär gebundenen benachbarten H-Atom als

1) Schon der Umstand, daß die Alkohole aktiv sind, schließt die — auch sonst experimentell widerlegte — Annahme aus, daß die Alkohole sich erst sekundär aus vorher entstandenem Terpin gebildet haben könnten.

H_2O auszutreten geneigt ist. Die Beweglichkeit dieses Wasserstoffatoms scheint etwa dem Methan-Wasserstoffatom im Triphenylmethan zu entsprechen. Bei dieser Wasserspaltung entsteht dann aber *intermediär* ein quaternär gebundenes Kohlenstoffatom:

Das Eintreten einer solchen quaternären Bindung setzt nun augenscheinlich die *Stabilität des* sich anschließenden *Drei- und Vierringsystems* ganz außerordentlich *herab*, so daß im zweiten Schritt mit der größten Leichtigkeit unter Wasser*addition* Ringsprengung erfolgt. Wenn man diese Interpretation acceptiert, so erklären sich die eben angeführten und eine ganze Reihe von Tatsachen, die nachher näher besprochen werden sollen, ganz ungezwungen. Im Anschluß an das Gesagte sei folgendes schon vorweg bemerkt. Während das Sabinenhydrat sehr leicht bis zum Terpin aufgespalten werden kann, ist der ganz analog gebaute *Homothujylalkohol*

ein gegen Säuren sehr beständiger Körper. In diesem Alkohol hat das Hydroxyl eben eine ganz andere Stellung zur intracyclischen Bindung wie im Sabinenhydrat. Auffallend und scheinbar nicht im Einklang mit der gegebenen Deutung ist die relativ große Beständigkeit des Nopinols, im Vergleich mit der des Homonopinols (Pinenhydrats).



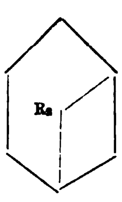
Nopinol Homonopinol.

Dieser Unterschied könnte aber sehr wohl darin seine Begründung haben, daß in sekundären Alkoholen das Hydroxyl viel fester gebunden ist als in tertiären und darum der die Reaktion einleitende Wasseraustritt viel schwerer erfolgt.

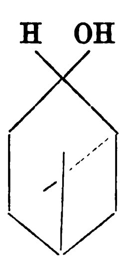
Wie dem aber auch sei: die nachfolgenden Versuche haben unzweideutig ergeben, daß in bicyclischen Systemen die Ortsstellung bestimmter Elemente (wie Sauerstoff) oder Radikale (OH, CH_3), oder Doppelbindungen auf die Leichtigkeit der Ringsprengung unter Wasseraufnahme von bestimmendem Einfluß ist. Das stimmt übrigens ganz mit Erfahrungen, welche W. H. Perkin gelegentlich von Versuchen über die Beständigkeit der verschiedenen Ringsysteme den Halogenwasserstoffsäuren gegenüber gemacht hat und die ihn zu dem Schluß führten[1]): „that the stability of the cyklopropane and cyklobutane rings depends to a much greater extent on the nature and position of the groups attached to the ring, than to the number of carbon atoms which the ring contains“.

1) cf. Chem. Soc. Tr. 1907, 817.

I. Vergleichende Versuche über die Auflösbarkeit des Vierrings unter Wasser-Addition bei Verbindungen vom Typus:

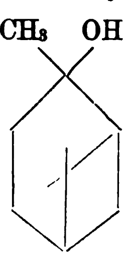


1) Nopinol[1])



Kristallisiertes α-Nopinol geht bei andauerndem Schütteln mit 3 %iger Schwefelsäure vollkommen in Lösung. Aber auch nach wochenlangem Stehen der Lösung läßt sich die Bildung eines Wasseradditionsproduktes nicht nachweisen. Man erhält nach der Neutralisation α-Nopinol ganz unverändert zurück. Flüssiges β-Nopinol verhält sich ähnlich. Nur einmal gelang es, eines Hydratationsprodukts habhaft zu werden, aber in so geringer Menge, daß eine Untersuchung noch nicht möglich war.

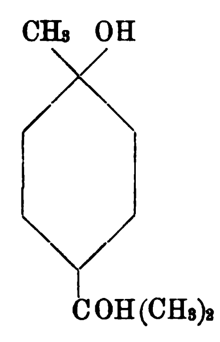
2) Methylnopinol (Pinenhydrat)[2])



Es genügt ein zwei- bis dreistündiges Schütteln des Alkohols mit verdünnter Säure, um eine quantitative Umwandlung in Terpinhydrat

---

1) Annalen **356**, 236.
2) Annalen **356**, 239.



zu erzielen.

Die Reaktion erfolgt aber nicht in einem Schritt. Man beobachtet vielmehr, daß das kristallisierte Methylnopinol sich zum Teil verflüssigt, ehe es in Lösung geht.

Um das Zwischenprodukt der Reaktion zu fassen, wurde in folgender Weise verfahren.

Reines Homonopinol (Schmelzp. 59°, Siedep. 204—205°) wurde in wenig Äther gelöst und etwa eine Stunde mit etwa dem 100-fachen Volum 5%iger Schwefelsäure bei gewöhnlicher Temperatur tüchtig durchgeschüttelt, dann die Flüssigkeit alkalisch gemacht und der Dampfdestillation unterworfen. Die flüchtigen Produkte wurden getrocknet und zunächst im Vakuum rektifiziert. Es wurde ein dickflüssiges Öl von höherem Siedepunkt als das angewandte Homonopinol erhalten, das bei starkem Abkühlen erstarrte. Das durch Abpressen auf Ton von flüssigen Anteilen befreite Produkt erwies sich — wie aus den nachfolgenden Belegen sich ergeben wird — als reines, stark linksdrehendes α-Terpineol, welches man nunmehr aus Nopinon in beliebiger Menge synthetisch aufbauen kann. Damit ist die erste Synthese eines aktiven α-Terpineols aus einer an Kohlenstoff ärmeren Substanz erreicht.

Die Eigenschaften des erhaltenen synthetischen Terpineols waren folgende:

Siedepunkt 218—219°. Die Verbindung erstarrt beim Abkühlen zu durchsichtigen Kristallen und zwar viel leichter als inaktives α-Terpineol, auch besitzt es einen etwas höheren Schmelzpunkt, nämlich **37—38°** (gegen 35° des i-α-Terpineols). Die optische Aktivität ist sehr bedeutend, wie aus folgender vorläufigen Bestimmung hervorgeht:

$S = 2{,}1976$, L (Äther) $= 11{,}2468$ g, $d = 0{,}755$,
$p = 16{,}34\,\%$, $t = 16^{\circ}$, $l = 1$ dm, $\alpha_D = -13^{\circ}\,5'$
$$[\alpha]_D = \mathbf{-106^{\circ}}.$$

Ein so stark aktives Terpineol ist, beiläufig bemerkt, so weit ich finden kann, erst einmal und zwar von Ertschikowsky in einer mir im Original nicht zugänglichen Abhandlung beschrieben worden [1]). Die sonst beobachteten natürlich vorkommenden sowohl wie durch Abwandelung aus aktiven Verbindungen mit 10 Kohlenstoffatomen künstlich dargestellten aktiven α-Terpineole enthielten augenscheinlich alle mehr oder weniger inaktives Terpineol. Daher kommt es wohl auch, daß der Schmelzpunkt der bis dahin zur Beobachtung gekommenen aktiven Präparate immer zu niedrig und wie der des i-α-Terpineol angegeben wird. Nur in den Berichten von Schimmel & Co. (**1897**, II. 9) finde ich die Angabe, daß ein stark rechts drehendes (+ 83° 31′) Terpineol, das aus Malabar-Cardamomenöl isoliert wurde, den Schmelzpunkt 35—37° aufwies.

Das synthetische l-α-Terpineol aus Nopinon wurde folgenden Abwandelungen unterworfen.

Mit Nitrosylchlorid gibt es leicht ein Additionsprodukt $(C_{10}H_{18}O . NOCl)_2$, welches in Alkohol ziemlich leicht löslich ist und aus verdünntem Methylalkohol in feinen Nadeln kristallisiert, die etwa bei 107—108° schmelzen. Bei der Umsetzung mit Piperidin gibt das Nitrosochlorid-Additionsprodukt ein Nitrolpiperidid, das nach der üblichen Reinigung aus Methylalkohol in Nadeln oder Prismen vom Schmelzpunkt 150° kristallisiert. Dies aktive Nitrolamin schmilzt also etwas niedriger als das inaktive, dessen Schmelzpunkt ich bei 159—160° fand [2]). Das stimmt übrigens gleichfalls mit Beobachtungen, welche von Schimmels [3]) mit der aus rechts drehendem natürlichen Terpineol dargestellten Verbindung gemacht wurden.

Bei der Oxydation mit Permanganat unter den bekannten Bedingungen erhielt man aus dem synthetischen l-Terpineol ein festes Glycerin, das bei der Weiteroxydation mit Chromsäure nach der von mir für die Oxydation des 1.2.8. Trioxyterpans gegebenen Vorschrift [4]) leicht ein rechtsdrehendes Ketolakton vom Schmelzpunkt 46—47° lieferte, während das zugehörige Semicarbazon bei 199° schmolz.

Auch dies Verhalten beweist, daß wirklich α-Terpineol vorlag.

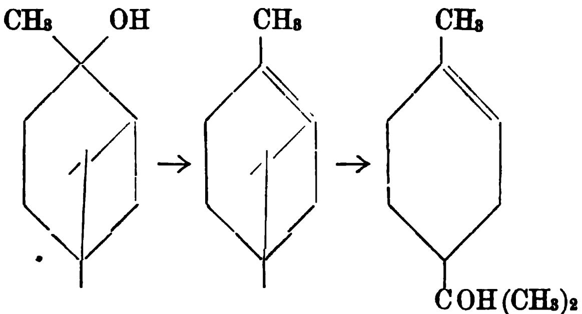
1) Gildemeister und Hoffmann, Ätherische Öle, S. 201.

2) Annalen **277**, 121.

3) Ber. v. Schimmel 1897, II, 9.

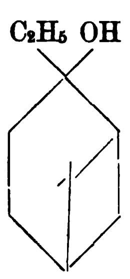
4) Annalen **275**, 153.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben ist, kann man sich den Übergang von Pinenhydrat in actives α-Terpineol kaum anders als nach dem Schema:



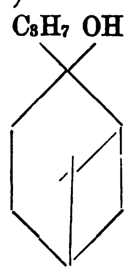
verlaufend vorstellen und versteht bei dieser ausgeprägten Neigung des Hydroxyls, nach der Seite des Vierrings hin als Wasser auszutreten, nun auch vollkommen, warum bisher alle Bemühungen gescheitert sind, das Pinenhydrat (Homonopinol) durch Wasserentziehung in Pinen zu verwandeln, sondern weshalb dabei immer sogleich Terpinolen, Limonen oder Terpinen auftritt [1]).

3) Aethylnopinol [2])



spaltet sich in derselben Weise wie Methylnopinol zu einem homologen Terpinhydrat auf, nur verläuft der letzte Schritt der Reaction, die Terpinbildung, langsamer.

4) *n*-Propylnopinol [3])



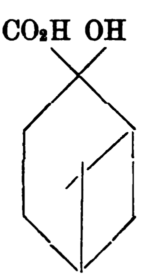
1) Annalen **356**, 241 und W. H. Perkin, Tr. Chem. Soc. **1907**. 1737.

2) Annalen **357**, 59.

3) Annalen **357**, 63.

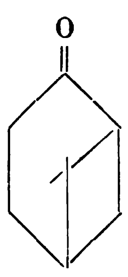
reagiert noch träger mit 3%iger Schwefelsäure wie Aethylnopinol. Der Vorgang ist aber qualitativ derselbe wie bei der Methyl- und Aethyl-Verbindung.

5) Nopinsäure



Es gelang — wie jetzt erklärlich — nicht, die Verbindung durch Einwirkung von verdünnter kalter Schwelsäure zu einer gesättigten Bioxysäure aufzuspalten. Dagegen liefert, wie schon v. Baeyer fand,[1]) die Nopinsäure beim Kochen mit Schwefelsäure unter Ringsprengung und Wasserabspaltung Bihydrocuminsäure.

6) Nopinon



Das Nopinon erleidet auch bei mehrtägigem Schütteln mit verd. kalter Schwefelsäure kaum Veränderung, dagegen geht es beim Kochen mit concentrierterer Säure allmählich in Isopropylhexenon über[2]).

7) Pinocamphon

CH_3

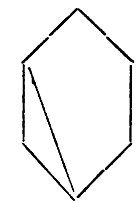
O =

1) Ber. **29**, 1926.

2) Annalen **356**, 235.

zeigt sich auch gegenüber kochender Schwefelsäure der Concentration, welche Nopinon verändert, noch beständig.

II. Vergleichende Versuche über die Auflösbarkeit des Dreiringsystems unter Wasser-Addition bei Verbindungen vom Typus:



A. Verhalten gesättigter Verbindungen.

1) Thujylalkohol

CH_3

OH

H

C_3H_7

Der Alkohol erweist sich verdünnter kalter Schwefelsäure gegenüber vollkommen beständig.

2) Homothujylalkohol

CH_3

OH

CH_3

C_3H_7

wurde mit Hilfe der Grignardschen Reaction auf meine Veranlassung von Herrn D. Thomson aus Thujon und Methylmagnesiumjodid bereitet und in zwei Modificationen, einer bei 84° schmelzenden festen und einer flüssigen, erhalten.

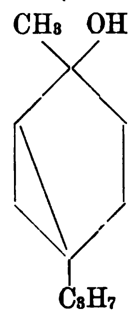
Analyse des krystallisierten Alkohols:

0.2295 gr gaben 0.6600 CO_2 und 0.2482 H_2O

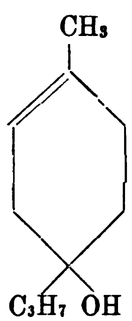
Berechnet für $C_{11}H_{20}O$	Gefunden
C — 78.49	78.42
H — 12.01	12.13

beide Modificationen bleiben bei tagelangem Schütteln mit verd. Schwefelsäure unverändert.

3) Methylsabinaketol (Sabinenhydrat)[1])



erleidet im Gegensatz zum Thujylalkohol und Homothujylalkohol beim Schütteln mit Schwefelsäure mit größter Leichtigkeit Veränderung unter Lösung des Dreirings und Entstehung von Terpinenterpin (s. o.). Diese Reaction verläuft aber auch hier ebensowenig in einem Schritt, wie bei Umwandlung von Homonopinol in gewöhnliches Terpin. Vielmehr entsteht als primäres Einwirkungsproduct der verdünnten Säure aktives rechts-Terpinenol (4)



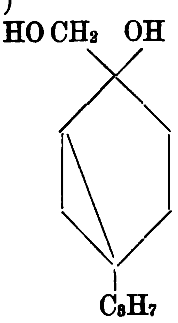
Zum Nachweis dieses Alkohols wurde nach 24stündigem Schütteln des Sabinenhydrats mit Schwefelsäure die Flüssigkeit neutralisiert und die vorhandenen flüssigen Anteile mit Wasserdampf abgeblasen. Dieselben enthielten wenig Kohlenwasserstoff (wahrscheinlich Terpinen) und in der Hauptmenge einen zwischen 200—210° siedenden Bestandteil, der seinem Verhalten nach nur actives

1) Annalen 357, 65.

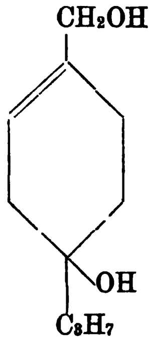
Terpinenol (4) sein konnte. Denn bei der Oxydation mit Permanganat wurde ein Glycerin daraus erhalten, das bei zweimaligem Umkrystrallisieren aus Chloroform bei 114° schmolz und bei weiterer Oxydation eine bei 205° schmelzende Säure lieferte, welche sich mit der aus activem Terpinenol (4) entstehenden identisch erwies [1]).

Die höheren Homologen des Methylsabinaketols verhalten sich gegen verdünnte Schwefelsäure analog, reagieren aber langsamer und unvollständiger, wenigstens was die Entstehung von Glycol betrifft.

4) Sabinenglycol [2])



welches ja als ein in der Methyl-Gruppe hydroxyliertes Methylsabinaketol aufgefaßt werden kann, reagiert entsprechend leicht wie letzteres. Man erhält beim Schütteln mit verdünnter Schwefelsäure daraus ein schön krystallisierendes ungesättigtes Glycol vom Schmelzpunkt 105°, dem wahrscheinlich die Formel:



zukommen wird. Die nähere Untersuchung steht aber noch aus.

Analyse des Glycols: 0.1283 gr gaben 0.3324 CO_2 und 0.1229 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O_2$	Gefunden
C — 70.51	70.66
H — 10.68	10.74

1) Annalen 356, 212.

2) Semmler, Ber. Ch. Ges. 33, 1459; 35, 2046.

5) Thujon

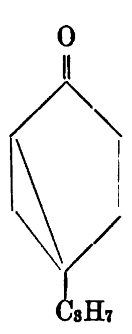
CH_3

=O

C_3H_7

wird von verdünnter Schwefelsäure schwer angegriffen, dagegen von stärkerer heißer Schwefelsäure oder alkoholischer Säure bekanntlich leicht zu Isothujon invertiert.

6) Sabinaketon



Ist auch gegenüber kalter verdünnter Säure ziemlich widerstandsfähig, namentlich ungleich beständiger als Methylsabinaketol. Dagegen wirkt warme und besonders alkoholische Schwefelsäure schnell auf das gesättigte Keton ein und zwar unter Entstehung von Isopropylhexenon. (Näheres wird an anderer Stelle mitgeteilt werden.)

B. Verhalten ungesättigter Verbindungen.

1) Thujen

CH_3

C_3H_7

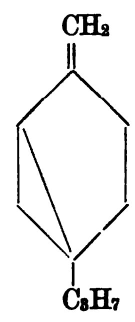
geht bei mehrtägigem Schütteln mit verdünnter Schwefelsäure zunächst in Terpinenol (4)

CH_3

C_3H_7 OH

dann weiter in Terpinenterpin über. (Vergl. Annal. **356**, 202).

2) Sabinen



liefert, wie andern Orts [1]) schon dargelegt wurde, mit verdünnter kalter Schwefelsäure ziemlich schnell Terpinenol (4) und Terpinenterpin.

Für den Verlauf der Umwandlung sind folgende Phasen anzunehmen:

CH_2 → CH_3, OH → CH_3 → CH_3 → CH_3, OH

C_3H_7 — C_3H_7 — C_3H_7 — C_3H_7, OH — C_3H_7, OH

Sabinen — intermediär — Terpinenol — Terpin (Schmelzp. 137°)

1) Annalen **356**, 202, 215.

3) Sabinol

CH_2

—OH

C_3H_7

Bezüglich dieser Verbindung gibt Semmler[1]) an: „Durch einfache Wasseranlagerung sollte man von Sabinol zu einem zweiwertigen Alkohol des Tanacetontypus gelangen; jedoch vollzieht sich die Sprengung des Dreirings unter Cymolbildung so schnell, daß das Glycol bezw. Glycerin bisher nicht gefaßt werden konnte."

Die bei den vorliegenden Versuchen eingehaltenen Reaktionsbedingungen (s. o.) erlauben nun, das theoretisch leicht diagnosticierbare Zwischenprodukt bequem zu isolieren.

Je 30 gr Sabinol wurden mit 800 ccm 5⁰/₀iger Schwefelsäure mehrere Tage geschüttelt. Etwa die Hälfte des angewandten Öls geht in Lösung, aber auch das auf der Flüssigkeit schwimmende Öl erweist sich als stark verändert. Die saure Lösung wurde mit Alkali neutralisiert und die vorhandenen flüchtigen Produkte mit Wasserdampf abgeblasen, der Rückstand mit Chloroform extrahiert. Bei der Rectification des Chloroformauszuges wurde ein unter 30^{mm} bei 175^0 übergehendes, wasserhelles, schwer bewegliches Produkt erhalten.

0.1563 gr gaben 0.4038 CO_2 und 0.1512 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O_2$	Gefunden
C — 70.51	70.46
H — 10.68	10.84

Es liegt also ein Glycol $C_{10}H_{18}O_2$ vor, welches durch Wasseraufnahme aus dem Sabinol, $C_{10}H_{16}O$, entstanden ist. Dies Glycol ist ungesättigt und läßt sich durch Oxydation mit Permangamat (nach Wagner) in den folgenden vierwertigen Alkohol überführen.

Erythrit $C_{10}H_{20}O_4$.

Je 5 gr Glycol $C_{10}H_{18}O_2$ werden in 300 ccm Wasser unter Erwärmen gelöst und die dann auf 0^0 abgekühlte Lösung mit einer 1⁰/₀igen Lösung von 5 gr Permangenat oxydiert. Die filtrierte Oxydationslauge wird darauf unter Einleiten von Kohlen-

1) Handbuch III, 205.

dioxyd zur Trockne gebracht und der Trockenrückstand mit 95 %igem Alkohol extrahiert. Der nach Verdampfen der alkoholischen Lösung hinterbleibende syrupöse Rückstand wird nach dem Überschichten mit Essigäther oder Ligroïn bald fest und dann nach dem Absaugen auf Thon aus der 10—15fachen Menge Essigäther, der mit ein wenig Methylalkohol versetzt ist, umkrystallisiert.

Man erhält die neue Verbindung so in gut ausgebildeten bei 166° schmelzenden Krystallen.

0.1483 gr gaben 0.3194 CO_2 und 0.1332 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{20}O_4$	Gefunden
C — 58.77	58.74
H — 9.89	10.07

Die Verbindung ist in Alkohol und Wasser leicht löslich. Die Lösungen besitzen einen süßlichen Geschmack.

Falls die in der Einleitung gemachten Voraussetzungen richtig sind und falls das Sabinol sich analog verhält wie Sabinen, verläuft die Entstehung des Erythrits aus dem Sabinol in folgenden Etappen:

abinol → hypothetische Zwischenproducte → Glycol $C_{10}H_{18}O_2$ → Erythrit $C_{10}H_{20}O_4$

III. Vergleichende Versuche über die Auflösung einer Äthylenbindung unter Wasseraddition:

1) Verhalten der isomeren Menthenole:

I	II	III	IV	V
CH_3	CH_3	CH_3	CH_3	CH_3
	OH	OH		OH
			OH	
$COH(CH_3)_2$	$C{=}CH_2$ CH_3	$C(CH_3)_2$	$CH(CH_3)_2$	$CH(CH_3)_2$
[α-Terpineol]	[β-Terpineol]	[γ-Terpineol]	[Terpinenol(4)]	[Terpinenol(1)]
Δ^{1}-Menthenol (8)	$\Delta^{8,9}$-Menthenol (1)	$\Delta^{4,8}$-Menthenol (1)	Δ^{1}-Menthenol (4)	Δ^{3}-Menthenol (1)

Diesbezüglich ist zu bemerken, daß β- und γ-Terpineol (II u. III) beim Schütteln mit verdünnter Schwefelsäure merklich schneller unter Terpin-Bildung in Lösung gehen als α-Terpineol (I). Die beiden Terpinenole (IV und V) addieren wiederum so viel schwieriger Wasser als die Terpineole (I, II, III), daß dieses Verhalten zwecks Isolierung der Terpinenole aus Gemischen von Isomeren ausgenutzt werden kann, wie ich früher schon angegeben habe.[1])

Im Übrigen ist es leicht verständlich, daß als Hydratationsproduct α- und β-Terpineol ausschließlich gewöhnliches Terpinhydrat liefern müssen, Terpinenol (1) und Terpinenol (4) das bei 137° schmelzende Terpinenterpin und γ-Terpineol ein Gemenge von beiden stellungsisomeren Terpinen der Limonenreihe.

Die bisher vorliegenden Tatsachen geben ferner einen dahingehenden Fingerzeig, daß die semicyclische Bindung sehr additionsfähig ist. Daß das auch für eine in der Seitenkette stehende Methen-Gruppe gilt, geht aus folgenden Versuchen hervor.

---

1) Annalen **356**, 218.

2) Bihydrocarveol

CH_3
—OH
$C{=}CH_2$
CH_3

dessen Additionsfähigkeit bei Gegenwart concentrierter Säure schon bekannt ist,[1]) addiert auch beim Schütteln mit 5%iger Säure in der Kälte, ohne daß dabei Verharzung eintritt, leicht Wasser unter Bildung des Glycols

CH_3
—OH
$C\,OH\,CH_3$
CH_3

3) Isopulegol

CH_3
—OH
$CH_3\,C{=}CH_2$

addiert nach Versuchen, die Herr Adolf Rosenbach hier

1) Rupe u. Schlochoff, Ber. 38, 1719, 1721.

durchgeführt hat, beim Schütteln mit verdünnter Schwefelsäure sehr leicht Wasser unter Bildung des bei 72° schmelzenden Glycols:

CH_3

—OH

$COH(CH_3)_2$

Analyse: 0.1541 gr gaben 0.3951 CO_2 und 0.1638 H_2O

Berechnet für $C_{10}H_{20}O_2$	Gefunden
C — 69.75	69.90
H — 11.60	11.89

4) Von den bisher untersuchten Kohlenwasserstoffen addiert besonders leicht Sabinen, unter Bildung von Terpinenol (4)[1]. Nach der oben dargelegten Auffassung würde der Gang der Reaction gemäß folgenden Schema's verlaufen:

CH_2 → HO CH_3 → CH_3 → CH_3

C_3H_7 C_3H_7 C_3H_7 OH C_3H_7

Sabinen intermediär Terpinenol (4)

Das primär entstehende Sabinenhydrat ist, wie erst erörtert worden ist, Schwefelsäure gegenüber so unbeständig, daß es sofort in dem besprochenen Sinne weiter umgewandelt wird.

Pinen wird von 5%iger Schwefelsäure nur sehr langsam, Limonen, auffallender Weise, nicht nachweisbar im Verlauf von einigen Tagen verändert.

Um so bemerkenswerter ist es, daß der wesentlich β-Phellandren enthaltende Kohlenwasserstoff des Wasserfenchelöls (nach Versuchen von Stud. Stromann) reichlich cis-Terpin, neben

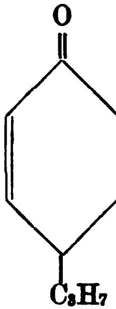
1) Annalen 356, 215; 40, 594.

wenig trans-Terpin liefert. Ob dieses Produkt aus dem β-Phellandren selbst oder aus einer Beimengung stammt, kann noch nicht mit Bestimmtheit angegeben werden. Jedenfalls tritt nach wochenlangem Schütteln die Reaction auf β-Phellandren in der angewandten Substanz nur noch schwach ein.

Bei der Durchführung der vorstehenden Arbeit habe ich mich der vortrefflichen Unterstützung meines Assistenten Herrn Dr. F. Boedecker zu erfreuen gehabt.

II. Synthese von α-Phellandren.

Für diese Synthese wurde vom Δ^2- (= Δ^5-)Isopropylhexenon



ausgegangen. Dies Keton hatte ich früher schon und zwar zuerst durch Abbau des β-Phellandrens, dann durch Isomerisierung des Nopinons erhalten. Bequemer kann man es, worauf ich anderen Orts ausführlicher eingehen werde, durch geeignete Umlagerung des Sabinaketons darstellen.

Das Isopropylhexenon hat folgende physikalische Eigenschaften:

$$\text{Siedepunkt } 218-219^0,\ d^{19^0} = 0{,}947,\ n_D = 1{,}4807 \text{ bei } 19^0$$
$$M = 41{,}45 \text{ (ber. } 41{,}22).$$

Das Semicarbazon des Δ^2-Isopropylhexenons schmilzt bei 184 bis 185°.

Wird das Isopropylhexenon mit einem Überschuß von Methylmagnesiumjodid in ätherischer Lösung umgesetzt[1]) und einige Zeit

1) Über den im ersten Schritt der Reaction entstehenden Alkohol $C_{10}H_{17}OH$ wird später berichtet werden.

damit stehen gelassen, so spaltet der intermediär entstehende tertiäre Alkohol zum Teil Wasser ab, unter Bildung von α-Phellandren, gemäß folgendem Schema:

O → CH_3 OH → CH_3

C_3H_7 C_3H_7 C_3H_7

Isopropylhexenon α-Phellandren

Der gewonnene Kohlenwasserstoff hatte folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 175—176°, $d^{22°} = 0.841$, $n_D = 1,1760$ bei 22°

$M = 45,61$ (ber. für $C_{10}H_{16}/\!\!=^{2} = 45,24$).

Das Präparat war schwach rechts drehend und bestand aus einem Gemisch von d- und i-α-Phellandren. Die Identificierung des Kohlenwasserstoffs gelang leicht durch das Nitrit, $C_{10}H_{16}N_2O_3$, welches bei der Einwirkung von Stickstofftrioxyd in Ligroïn-Lösung sich fast momentan ausschied und nach der Reinigung durch Krystallisation den Schmelzpunkt 113° und den bekannten Habitus des Phellandrennitrits zeigte. Mit alkoholischem Kali erwärmt, lieferte es Nitrophellandren und aus diesem konnte durch Reduction mit Zinkstaub in Eisessiglösung i-Carvotanaceton gewonnen werden, das durch sein bei 177° schmelzendes Semicarbazon identificiert wurde.

Es ist ferner auch versucht worden, β-Phellandren aus Isopropylhexenon dadurch aufzubauen, daß das Keton mit Zink und Bromessigester condensiert, dem entstandenen Oxyester Wasser entzogen und die darauf erhaltene ungesättigte Säure der trockenen Destillation unterworfen wurde. Es entstand dabei tatsächlich ein Kohlenwasserstoff, der deutlich die Phellandrenreaction lieferte. Nach dem Schema:

CH_2CO_2H

O → OH → CH_2

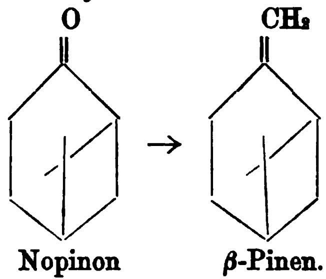
C_3H_7 C_3H_7 C_3H_7

muß man die Bildung von β-Phellandren bei der Reaktion erwarten. Die Ausbeute an dem entstandenen Nitrit war aber bisher zu gering, um eine sichere Feststellung zu erlauben, ob wirklich β-Phellandren und nicht etwa α-Phellandren vorlag.

Auch bei dieser Untersuchung ist mir Dr. Fr. Boedecker zur Hand gegangen.

III. Synthese des Isofenchons, $C_{10}H_{16}O$, aus dem Nopinon $C_9H_{14}O$.

Vor Kurzem habe ich über Versuche berichtet[1]), welche darauf hinzielten, mit Hilfe der Zink-Bromessigester-Reaktion aus dem Nopinon das β-Pinen zu synthetisieren:



Nopinon β-Pinen.

Statt des erwarteten β-Pinen wurde aber ein isomerer Methenkohlenwasserstoff, $C_{10}H_{16}$, erhalten.

Dieser Kohlenwasserstoff liefert bei der Oxydation mit Permanganat ein bei 154—155° schmelzende α-Oxysäure $C_{10}H_{16}O_3$, welche sich ihrerseits bei der Oxydation nicht in Nopinon $C_9H_{14}O$ zurückverwandeln ließ, sondern dabei ein isomeres, um 60° schmelzendes, im Aussehen und Geruch dem Campher bezw. Fenchocamphoron sehr ähnliches Keton lieferte.

Endlich war schon mitgeteilt, daß der synthetische Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{16}$ bei der Hydratation in einen bei 62° schmelzenden und bei 201—202 siedenden Alkohol $C_{10}H_{17}OH$ übergeht.

Durch die weitere Untersuchung ist nun die ebenso unerwartete, wie höchst interessante Tatsache festgestellt worden, daß der aus Nopinon synthetisch erhaltene Kohlenwasserstoff der

---

1) Nachr. G. d. W. 1907, 375; Annalen d. Ch. 357, 49.

Fenchen-Reihe angehört und daß der obenerwähnte Alkohol identisch ist mit Isofenchylalkohol.

Zunächst will ich hier das Beweismaterial beibringen, aus welchem die Richtigkeit dieser Auffassung mit voller Sicherheit zu folgern ist.

Der durch Hydrierung nach der Bertram-Walbaumschen Methode aus dem synthetischen Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{16}$ gewonnene bei 62° schmelzende Alkohol $C_{10}H_{17}OH$ verbindet sich mit Carbanil zu einem bei 206—207° schmelzenden Phenylurethan, welches in allen Lösungsmitteln sehr löslich ist, aber durch wiederholtes Umkrystallisieren aus verdünntem Methylalkohol in gut schmelzenden Krystallnädelchen erhalten werden kann.

Bei der Oxydation mit Chromsäure erhält man aus dem Alkohol ein Keton $C_{10}H_{16}O$ vom Siedepunkt ca. 200°. Das sich sehr schnell bildende Semicarbazon des Ketons ist rechts drehend und krystallisiert aus Methylalkohol in verfilzten Nadeln vom Schmelzpunkt 220—221°. Das leicht erstarrende Oxim des Ketons schmilzt bei 82°. Bei der Oxydation mit Permanganat liefert das Keton ganz glatt eine mit Camphersäure isomere Bicarbonsäure $C_{10}H_{16}O_4$, welche, aus der zehnfachen Menge heißem Wasser umkrystallisiert, bei 158—159° schmelzende Nädelchen bildet. Die Säure ist rechtsdrehend.

$S = 0{,}6540$, L (Äther) $= 5{,}1400$, $d = 0{,}755$,
$p = 12{,}72\,\%$, $l = 1$ dm, $\alpha = +1°\,10'$, $[\alpha]_D = +12°$.

Analyse des Silbersalzes:

0,2075 g gaben 0,1080 Ag.

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_4Ag_2$	Gefunden
Ag — 52,15	52,05.

Inzwischen habe ich in Gemeinschaft mit Herrn Stud. P. Virck aus d-Fenchon auf einem bei anderer Gelegenheit zu besprechenden Wege ein l-Fenchen (Siedep. 157—158°) von besonders starkem Drehungsvermögen $\alpha_D =$ ca. $-32°$ [im 1 dm Rohr] hergestellt. Dies l-Fenchen geht bei der Oxydation mit Permanganat glatt in die von mir früher[1]) beschriebene bei 153° schmelzende D-l-Oxyfenchensäure $C_{10}H_{16}O_3$ über. Besonders charakterisiert ist es durch seine Fähigkeit Brom aufzunehmen unter Bildung eines aus Essigester sehr schön kristallisierenden bei 87—88° schmelzenden Fenchenbibromids $C_{10}H_{16}Br_2$. Dies Bibromid ist ziemlich stark rechtsdrehend:

$S = 0{,}5994$, L (Essigester) $= 16{,}2186$, $d = 0{,}928$,
$t = 11°$, $p = 3{,}564\,\%$, $\alpha = +1°\,25'$ $[\alpha]_D = +42{,}83°$.

1) Annalen 302, 377.

Wird das stark linksdrehende Fenchen mit Eisessig-Schwefelsäure erwärmt, so entsteht in vorzüglicher Ausbeute Isofenchylacetat, das bei der Verseifung einen sofort erstarrenden Isofenchylalkohol lieferte, dem nur sehr geringe Mengen flüssiger Produkte beigemengt waren. Der abgepreßte Alkohol schmolz bei 61—62° und siedete bei 201—202°.

Das durch Oxydation aus dem Alkohol gewonnene Isofenchon zeigte (aus dem Semicarbazon regeneriert) folgende Eigenschaften:

Siedepunkt 201°, $d^{18,5} = 0,943$, $n_D = 1,4621$ bei 18,5°, $M = 44,32$ (ber. 44,11), $\alpha_D = -9^0\,35'$ (bei 14° im 1 dm Rohr).

Bei sehr niederer Temperatur (Äther + festem CO_2) erstarrt das Keton campferartig.

Das in verfilzten Nadeln krystallisierende Semicarbazon bildet sich leicht, schmilzt bei 221—222°, ist ziemlich löslich in Methylalkohol und linksdrehend, bei der Oxydation liefert das l-Isofenchon in fast quantitativer Ausbeute eine Bicarbonsäure, $C_{10}H_{16}O_4$, die ich Isofenchocamphersäure nennen will und deren Untersuchung noch nicht abgeschlossen ist. Vorläufig sei folgendes mitgeteilt:

Die Säure schmilzt bei 158—159° und ist linksdrehend.

$S = 0,2971$, L (Äther) $= 11,1182$, $p = 2,603$,
$t = 11^0$, $d = 0,736$, $l = 1$ dm, $\alpha = -0^0\,15'$,
$[\alpha]_D = -12,75^0$.

Analyse des Silbersalzes:

0,3985 g gaben 0,4250 CO_2 und 0,1221 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_4Ag_2$	Gefunden
C. 28,98	29,09
H. 3,41	3,43.

Damit ist — wie hier schon bemerkt sei — bewiesen, daß das Isofenchon einen ganz anderen Bau besitzt als das Fenchon und jedenfalls eine $CO\text{-}CH_2$-Gruppe enthält, welche sich, ganz analog wie die im Camphermolekül enthaltene, leicht zu einer Dicarbonsäure aufspalten läßt.

Vergleicht man nun die Eigenschaften der aus Nopinon synthetisch gewonnenen Substanzen mit den aus stark aktivem l-Fenchen erhältlichen und den Angaben, welche J. Bertram und J. Helle[1]), die Entdecker des Isofenchols und Isofenchons, bezüglich der Eigenschaften dieser Verbindungen machen, so ergibt sich folgendes:

1) cf. pr. Ch. 61, 293 (1900).

Synthetische Verbindungen aus Nopinon	Verbindungen aus Fenchen (aus d-Fenchon) Wallach u. Virck	Bertram u. Helle
$C_{10}H_{17}OH$		
Schmelzp. 62°	61—62°	61,5—62°
Siedep. 201—202°	201—202°	97—98° (13mm)
Phenylurethan Smp. 106—107°	—	106—107°
$C_{10}H_{16}O$		
Siedep. um 200°	201°	193—194°
Schmp. d. Semicarbozons 220—221°	221—222°	—
Schmelzp. d. Oxims 82°	82°	82°
$C_{10}H_{16}O_4$		
Schmelzp. 158—159°	158—159°	—
$[\alpha]_D = +12°$	— 12,75°	—

An der chemischen Identität der hier verglichenen Körper ist gar nicht zu zweifeln. Dagegen sind die durch Synthese aus Nopinon einerseits, und durch Abwandlung aus d-Fenchon andererseits entstandenen Verbindungen augenscheinlich physikalisch-isomer und zwar optische Antipoden, so daß also die aus Nopinon bereiteten der l-Fenchon-Reihe angehören und somit neu sind, denn bisher waren Isofenchyl-Verbindungen nur aus d-Fenchon gewonnen. Ich bin nun im Begriff das l-Fenchon entsprechend abzuwandeln, um so zu Verbindungen zu kommen, welche mit denen aus Nopinon auch physikalisch identisch sein müssen.

Aus den oben erörterten Tatsachen folgt dann weiter, daß der aus Nopinon gewonnene Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{16}$ ein Fenchen vorstellt und zwar ein Fenchen, welches eine Methengruppe enthält. Da die Fenchene in bezug auf ihre Drehungsintensität außerordentlich variabel sind[1]), so kann über die Beziehung des synthetischen Fenchens zu den schon bekannten heut noch nichts Sicheres ausgesagt werden. Ich werde auf diesen Punkt bei anderer Gelegenheit zurückkommen und möchte über die Bedeutung der gemachten Beobachtungen nur noch folgendes hinzufügen.

Es ist im ersten Augenblick ganz außerordentlich überraschend, daß man bei einem synthetischen Vorgang, bei welchem man die Entstehung von β-Pinen oder α-Pinen erwarten müßte, statt dessen zum Fenchen gelangte. Eher wäre noch das Auftreten von Camphen oder — wie bei den Synthesen mit Nopinon unter

1) cf. z. B. Annalen **302**, 375, 377.

Anwendung der Grignard-Reaktion [1]) — die Bildung von Limonen oder Terpinen verständlich gewesen. Man muß sich aber daran erinnern, daß doch schon Beobachtungen darüber vorliegen, daß Pinen sich zu Fenchylalkohol abwandeln läßt. Bouchardat und Tardy und Bouchardat und Lafont [2]) sind durch Erhitzen von Pinen-haltigen Fraktionen ätherischer Öle zu d-Fenchylalkohol gelangt.

Da es unbestimmt ist, ob bei den letzterwähnten Versuchen α- oder β-Pinen in Reaktion getreten ist, da ferner die Konstistitution des Fenchylalkohols und Isofenchylalkohols noch keineswegs sicher festgestellt ist, so schweben alle Spekulationen über den Mechanismus des Übergangs der Pinen- in die Fenchen-Reihe vorläufig in der Luft. Nichtsdestoweniger liegt die von anderer Seite [3]) schon gemachte Annahme sehr nah, daß bei dieser Isomerisation sich der Vierring im Pinen an anderer Stelle löst, als beim Übergang dieses Kohlenwasserstoffs in Camphen oder in Limonen. Es ist ferner denkbar, daß bei der von mir durchgeführten Synthese sich aus dem Nopinon intermediär wirklich Pinen gebildet, aber im Entstehungszustande zu Fenchen isomerisiert hat. Ich bin im Begriff unter Mitwirkung von Dr. Werner Lange die bei der Einwirkung von Bromessigester auf Nopinon sich im ersten Schritt bildenden Produkte jetzt eingehender zu untersuchen, in der Hoffnung den Mechanismus der neuen Reaktion klarstellen zu können.

1) Annalen **356**, 244.

2) Ber. **29**, R. 357 (1896); Centrbl. 1898, I, 893.

3) Kondakow, cf. pr. Ch. **65**, 232 (1902); Semmler, Handbuch III, 541 (1906).

Die Pyrenomyceten und Tuberaceen der Göttinger Flora.

(Unter Verwendung der Untersuchungen von G. Rahlfs in Elbing.)

Von

A. Peter.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Dezember 1907.

Nachdem schon seit längerer Zeit meine Bemühungen darauf gerichtet waren, die Grundlagen für eine Uebersicht der in Südhannover vorkommenden Kryptogamen zu gewinnen, und einige Veröffentlichungen darüber in den als Dissertationen im hiesigen botanischen Institut entstandenen Arbeiten der Herren F. Quelle[1]), M. Schmidt[2]) und J. Suhr[3]) vorlagen bezw. in Aussicht standen, übernahm der jetzige Kandidat des höheren Schulamtes Gustav Rahlfs in Elbing die Feststellung der in der Gegend von Göttingen vorkommenden Pyrenomyceten. Es sollte damit die Kenntnis der Verbreitung dieser Pilzgruppe in Norddeutschland gefördert werden. Zu diesem Zweck sah G. Rahlfs auch das Universitäts-Herbarium zu Göttingen durch und prüfte die darin enthaltenen Materialien auf die Richtigkeit der Bestimmungen. Leider mußte er, durch besondere Umstände gezwungen, seine Pilzstudien vorzeitig abbrechen. So ist eine wahrscheinlich nicht ganz vollständige Liste der Göttinger Pyrenomyceten entstanden. Gleichwohl möchte ich dieselbe nicht zurücklegen, bis sie später einmal ergänzt werden kann, was in absehbarer Zeit nicht sehr wahrscheinlich ist; ich teile sie hier mit, nachdem ich sie durch meine eigenen Funde

1) F. Quelle, Göttingens Moosvegetation. 1902.
2) Max Schmidt: Grundlagen einer Algenflora der Lüneburger Heide. 1903.
3) Joh. Suhr: Die Algen des östlichen Weserberglandes. 1905.

erweitert und ihr dadurch diejenige Ausdehnung gegeben habe, die mir zurzeit möglich ist. Alle vorhandenen Belagstücke sind von mir nochmals nachbestimmt worden.

Ueber das in Rede stehende Gebiet existiert meines Wissens nur eine einzige Publikation, die für die hier behandelten Pilzgruppen in Betracht kommt: Bartling et Hampe, Vegetabilia cellularia in Germania septentrionali praesertim in Hercynia et in Agro Gottingensi lecta, 1834. Leider war es nicht möglich, diese Arbeit zu berücksichtigen, da sie in keiner der im Bereich der Auskunftstelle der deutschen Bibliotheken zugänglichen Büchersammlungen vorhanden und auch durch die Verlagsbuchhandlung nicht mehr zu erlangen ist.

Was indessen die Göttinger Botaniker Bartling, Grisebach, Jahns, Lantzius-Beninga, Nöldeke, H. Graf zu Solms-Laubach nach dieser Zeit bei Göttingen gesammelt und in dem Universitäts-Herbarium niedergelegt haben, ist, soweit es nachgeprüft werden konnte, in die Liste aufgenommen worden. Bei jeder Fundstelle ist der betr. Sammler kenntlich gemacht, und zwar durch Beifügung des Buchstabens

B. . . . . Bartling,
Gr. . . . . Grisebach,
J. . . . . Jahns,
L. . . . . Lantzius-Beninga,
N. . . . . Nöldeke,
P. . . . . Peter,
R. . . . . Rahlfs,
S. . . . . Graf Solms.

Es wird nicht unangemessen erscheinen, wenn auch Fundorte mitgeteilt werden, die außerhalb der näheren Umgebung von Göttingen gelegen sind, z. B. im Harzgebirge, in Nordhannover. Sie stammen großenteils mit aus den vorliegenden Herbar-Materialien.

Die bisher beobachteten Tuberaceen des Gebietes habe ich beigefügt, um die Verbreitung der interessanten Pilzgruppe bei uns festzustellen.

Auf das Vorkommen folgender Arten sei besonders hingewiesen, weil sie entweder sehr selten sind (Anixia truncigena, Laestadia microspora, Didymosphaeria conoidea, Valsa dolosa) — oder bei uns weitab von ihren bisherigen Fundstellen auftreten (Melanomma conicum, Leptosphaeria Baggei, Hypoxylon semiimmersum, H. Botrys) — oder meines Wissens zum ersten Mal in Deutschland beobachtet wurden (Hypocrea contorta, Ceratosphaeria lampadophora, Leptosphaeria sparsa, L. dumetorum, Clypeosphaeria

mamillana, Diaporthe dryophila); — Herpotrichia nigra im Nörtener Walde schließt sich an das Vorkommen im Harzgebirge an.

Pyrenomycetes.

I. Perisporiaceae.

1. Erysipheae.

1. **Sphaerotheca** pannosa (Wallr.) Lév. auf lebenden Blättern und Zweigen von Rosa im Botanischen Garten zu Göttingen 9. VIII. 1894 (P.); desgl. von Rosa canina unweit der Burgruine Hanstein 5. VI. 1904 (P.). — Verbreitung: Deutschland, Belgien, Frankreich, England, Italien, Nordamerika, Indien.

2. Sph. Castagnei Lév. auf Sanguisorba officinalis im botanischen Garten Nov. 1865 (B.); — auf Impatiens noli tangere bei Göttingen Aug. 1900 (P.), im Unterharz zwischen Neuwerk und Wendefurt Aug. 1901 (P.); — auf Veronica in Ostfriesland 1843 (L.); — auf Spiraea Ulmaria am Wall in Göttingen VI. 1904 (P.), bei Gersfeld in der Rhön Juli 1907 (P.). — Verbr.: fast ganz Europa, Asien und Nordamerika.

3. **Podosphaera** tridactyla (Wallr.) de By. auf Prunus spinosa bei Göttingen Nov. 1843 (B.), Niederscheden 1843 (B.), bei Göttingen am Hainholzwege, wo der Ruprechtsweg denselben kreuzt 3. X. 1903 (R.). — Verbr.: fast ganz Europa, Nordamerika.

4. P. myrtillina Kunze auf Vaccinium Myrtillus bei Nienburg Aug. 1860 (N.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Belgien, Italien.

5. **Erysiphe** Umbelliferarum de Bary auf Heracleum Sphondylium bei Nüxey am Harz Juli 1853 (B.), dicht bei Meensen 1833 (B.), bei Göttingen am Hainholzwege 2. VIII. 1900 (P.), im Dorf Herberhausen Sept. 1900, 1906 (P.), hinter Herberhausen gegen den Hollandsgrund 16. VIII. 1904 (P.), zwischen Seeburg und Ebergötzen 7. IX. 1905 (R.); — auf Anthriscus silvestris in Herberhausen 16. VIII. 1904 (P.). — Verbr.: ganz Europa.

6. E. tortilis (Wallr.) Fr. auf Cornus sanguinea bei Ilfeld im Unterharz 1843 (L.), bei der Knochenmühle 18. X. 1846 (Gr.), in Hecken bei Bovenden Nov. 1860 (B.), am Rohns X. 1868 (J.), bei Göttingen 1879 (S.), im Rohnswäldchen 28. X. 1903 (R.), unter dem Knüll in der Nähe von Bettenrode und unter der Ruine

Gleichen 30. VII. 1905 (R.), am Waldrande über Harste 29. VIII. 1905 (R.), im Göttinger Walde allgemein verbreitet Okt. 1900, 1907 (P.). — Verbr.: Deutschland, Belgien, Frankreich, England, Italien.

7. E. communis (Wallr.) Fr. auf Trifolium agrarium bei Göttingen 1843 (B.); — auf Trifolium medium im Reintal bei Reinhausen Aug. 1904 (R.), an der Weper bei Hardegsen 26. IX. 1905 (R.), am Wege bei der Mühle zwischen Ebergötzen und Waake 7. IX. 1905 (R.); — auf Trifolium hybridum bei Knutbühren 21. IX. 1905 (R.); — auf Astragalus glycyphyllos bei Jühnde am Dorfrande 16. VIII. 1900 (P.), am Rande der Lieth über Parensen 29. VIII. 1905 (R.); — auf Pisum sativum in Ostfriesland 1843 (L.); — auf Hypericum perforatum bei Neu Waake zwischen Roringen und Södderich 30. X. 1864 (B.); — auf Hypericum hirsutum auf dem Kleinen Hagen Aug. 1905 (R.), am Hünstollen bei Göttingen 30. VI. 1901 (P.); — auf Ranunculus bei Ilfeld im Südharz 1843 (L.), im Botanischen Garten Nov. 1865 (B.); — auf Polygonum aviculare am Wege bei der Zuckerfabrik Nörten 29. VIII. 1905 (R.); — auf Ononis spinosa am Hainberge zwischen Kehr und Kaiser Wilhelm-Park 21. IX. 1905 (R.); — auf Pimpinella saxifraga auf der Weper bei Hardegsen 26. IX. 1905 (R.); — auf Aconitum Napellus im Botanischen Garten zu Göttingen 9. VIII. 1894 (P.). — Verbr.: in ganz Europa, Asien, Amerika.

8. E. Galeopsidis DC. auf Stachys palustris und Ballota nigra bei Ilfeld im Südharz 1843 (L.); — auf Clinopodium vulgare bei Roringen 18. X. 1846 (Gr.); — auf Stachys silvatica im Hollandsgrund des Göttinger Waldes 16. VIII. 1904 (R.), am Wege von Geismar zum Geismarer Holz 16. X. 1905 (R.); — auf Galeopsis Tetrahit am Forsthaus Hinterhausen bei Suterode 28. VIII. 1904 (P.), auf dem Mühlenberge dicht bei Bremke 14. IX. 1905 (R.); — auf Galeopsis versicolor am Wege nach Deppoldshausen durch die Waldschlucht 8. X. 1896 (P.) — Verbr: fast in ganz Europa.

9. E. Cichoriacearum DC. [= E. lamprocarpa (Wallr.) Lév.] auf Artemisia vulgaris und Lappa tomentosa bei Ilfeld im Südharz 1843 (L.); — auf Lappa tomentosa am Rauschenwasser bei Mariaspring Okt. 1860 (B.), am Ausgange des Dorfes Geismar gegen Kl. Lengden 7. IX. 1905 (R.), dicht an der Leinebrücke bei Nörten 29. VIII. 1905 (R.), zwischen Lenglern und Bovenden bei der Leinebrücke 29. VIII. 1905 (R.), an der Chaussée zwischen Landwehr- und Garteschenke (auf Blättern und Hüllschuppen) 10. XII. 1905 (R.); — auf Plantago major an der Chaussée von Göttingen nach Geismar 17. IX. 1905 (R.), auf Waldwegen zum

Bocksbühl bei Friedland 6. VIII. 1904 (P.), am Hohenweg zwischen Wilhelm Weberstraße und Herzberger Chaussée in Göttingen 6. IX. 1905 (R.); — auf Hieracium laevigatum bei Forsthaus Hinterhausen gegen Suterode 28. VIII. 1904 (P.); — auf Verbascum im Werratal zwischen Lindewerra und Oberrieden Sept. 1905 (P.); — auf Cynoglossum officinale bei Roringen 23. IX. 1905 (R.); — auf Symphytum asperrimum im Botanischen Garten zu Göttingen 1894 (P.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Belgien, Frankreich, Großbritannien, Italien, Sibirien, Aegypten, Nordamerika.

10. **Microsphaera** Astragali (DC.) Sacc. auf Astragalus glycyphyllos bei Ilfeld im Südharz 1843 (L.), bei Rohns' Amerika 3. VIII. 1849 (Gr.), bei Reinhausen Juli 1856 (B.), bei der Ruine Plesse Juli 1868 (J.), bei Nörten Juli 1869 (B.), zwischen Waake und Ebergötzen unweit der Mühle 7. IX. 1905 (R.), an der Langen Nacht bei Göttingen 10. VII. 1894 (P.) — Verbr.: Deutschland, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

11. M. Berberidis (DC.) Lév. auf Berberis vulgaris bei Göttingen 1843 (B.), 1879 (S.), im Botanischen Garten Okt. 1864 (B.) — Verbr.: Deutschland, Finland. Belgien, Frankreich, England, Italien.

12. M. Grossulariae (Wallr.) Lév. auf Ribes Grossularia in Göttingen 1843 (B.), in der Hecke eines Gartens der Hanssenstraße in Göttingen 28. IX. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Frankreich, England, Sibirien, Nordamerika.

13. M. divaricata (Wallr.) Lév. auf Rhamnus Frangula über Eddigehausen 9. VIII. 1904 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Belgien, Frankreich.

14. **Uncinula** Salicis (DC.) Wint. [= U. adunca (Wallr.) Lév.] auf Salix Caprea bei Göttingen Herbst 1835 (B.), bei Ilfeld 1843 (L.), auf blühender Salix Caprea bei Göttingen 1879 (S.). — Verbr: ganz Europa, Sibirien, Nordamerika.

15. U. Aceris (DC.) Sacc. auf Acer campestre bei Ilfeld im Südharz 1843 (L.), bei Meensen 1833 (Gr.), am Rauschenwasser bei Bovenden Sept. 1863 (B.), bei Göttingen Nov. 1869 (B.), beim Wellbrückenkrug 18. IX. 1898 (P.), an der Kaiserallée in Göttingen 3. X. 1905 (R.); — auf Acer platanoides dicht unter dem Rohns 3. X. 1905 (R.). — Verbr.: fast ganz Europa, Algerien.

16. U. Prunastri (DC.) Sacc. auf Prunus spinosa bei Ilfeld 1843 (L.), am Rande der Lieth über Harste 29. VIII. 1905 (R.), im Walde zwischen Herberhausen und Kerstlingeröderfeld 21. XI. 1905 (R.) — Verbr.: Deutschland, Belgien, Frankreich, Britannien, Italien.

17. **Phyllactinia** suffulta (Rebent.) Sacc. auf Corylus Avellana bei Ilfeld 1843 (L.), bei Meensen 1833 (Gr.), in der Lieth bei Bovenden Okt. 1863 (B.), bei Göttingen (S.), im Solling bei Schönhagen Juli 1898 (P.); — auf Fraxinus excelsior im Botanischen Garten XII. 1846 (B.), zwischen Sülbeck und Immensen bei Northeim an Grabenrändern 24. IX. 1897 (P.), am Hainholzweg in Göttigen (S.), 8. XI. 1903 (Quelle); — auf Fagus silvatica am Hessendreisch XI. 1846 (B., Gr.), bei Göttingen XI. 1855 (B.), im Walde zwischen Herberhausen und Kerstlingeröderfeld 1. XII. 1907 (P.). — Verbr.: Europa, Sibirien, Nordamerika.

2. Perisporiaceae.

18. **Anixia** spadicea Fuck. auf einer Heukultur im Botanischen Institut in Göttingen 27. II. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland auf faulenden Halmen von Secale cereale.

19. A. truncigena Hoffm. auf einer Lehmwand in Göttingen 12. VII. 1905 (R.). — Verbr.: bisher nur im Frühjahr an Kiefernholz bei Oestrich im Rheingau beobachtet.

20. **Eurotium** herbariorum (Wigg.) Lk. bei Göttingen 1843 (B.), mit Askenfrucht 1881 (S.), überall sehr häufig auf feuchten Pflanzenresten (P., R.). — Verbr.: Europa, Nord- und Südamerika, Asien, Afrika, Australien.

21. **Aspergillus** niger van Tieghem [= Sterigmatocystis nigra van Tieghem] auf faulenden organischen Resten sehr häufig (R.). — Verbr.: Deutschland, Frankreich.

22. A. flavus (de Bary) Brefeld auf faulen organischen Substanzen häufig (R.); — auf faulem Fleisch in Göttingen 13. XII. 1901 (P.). — Verbr.: Deutschland, Belgien, Italien, Nordamerika.

23. A. nidulans (Eidam) Wint. im menschlichen Ohr in Göttingen VI. 1889 (P.). — Verbr.: auf Hummelnestern in Deutschland.

24. A. fumigatus Fres. in der Lunge des Menschen, Göttingen I. 1902 (P.). — Verbr.: in der menschlichen Zunge und in der Lunge von Otis tarda in Deutschland.

25. **Penicillium** crustaceum (L.) Fries [= P. glaucum Lk.] auf allen organischen Resten gemein (R.). — Verbr.: kosmopolitisch.

26. **Lasiobotrys** Lonicerae Kunze auf lebenden Blättern von Lonicera Periclymenum in Karlslust bei Adelebsen VII. 1873 (B.). — Verbr.: Deutschland, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Algerien, Sibirien auf den grünen Blättern mehrerer Lonicera-Arten.

II. Hypocreaceae.

3. Hypocreaceae.

27. **Gibberella** pulicaris (Fr.) Sacc. auf dürren Zweigen von Sambucus bei Göttingen 1843 (B.). — Verbr.: Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Süddeutschland, Rußland, Algerien, Nordamerika, Neuseeland.

28. **Nectria** cinnabarina (Tode) Fries in Herrenhausen bei Hannover I. 1832 (Gr.); — auf altem Holz im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1842 (B.); — auf Zweigen von Sambucus bei Göttingen 1843 (B.); auf abgeworfenen Zweigen bei Mariaspring X. 1860 (B.); — auf Sambucus racemosa am Wendebach zwischen Obernjesa und Reinhausen 2. X. 1904 (R.); — an trockenen Aesten von Tilia bei der Ruine Plesse 20. X. 1904 (R.); — auf dürrem Holz von Spiraea spec. in einem Garten in Göttingen 18. V. 1905 (R.); — auf Zweigen von Aesculus Hippocastanum am Weendertor in Göttingen (tötete den sehr alten Baum) 17. IX. 1905 (P.); — auf Acer platanoides, Pavia, Broussonetia papyrifera, Pirus Malus, Ampelopsis hederacea, Ulmus montana, Fagus silvatica etc. im Botanischen Garten zu Göttingen 1888/1907 sehr reichlich als Saprophyt oder oft als gefährlicher Parasit (P.). — Verbr.: ganz Europa, Sibirien, Ceylon, Nordamerika.

29. N. coccinea (Pers.) Fr. auf Baumrinde zwischen Nikolausberg und Deppoldshausen XI. 1861 (B.), bei Münden 12. X. 1863 (B.), auf dem Hohenhagen bei Dransfeld III. 1868 (J.). — Verbr.: ganz Europa, Sibirien, Nordamerika, Brasilien, Ceylon, Borneo, Java, Südafrika, Tasmanien.

30. N. ditissima Tul. bildet Krebsstellen an Fagus silvatica im Hollandsgrund des Göttinger Waldes 21. IX. 1905 (R.), im Nörtener Walde, bei Catlenburg und Lindau, im Solling und sonst sehr verbreitet 1888/1907 (P.). — Verbr.: Deutschland, Britannien, Frankreich, Italien.

31. N. Cucurbitula (Tode) Fr. auf Fichtenrinde bei Clausthal (Harz) im Mönchstal XI. 1870 (J.); — bildet Krebsstellen auf Picea excelsa im Oberharz bei Andreasberg 1903 (P.); bei Fallingbostel auf der Lüneburger Heide 1904 (P.), bei Göttingen 1888 (P.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Oesterreich, Frankreich, Italien.

32. N. sanguinea (Sibth.) Fr. auf abgefallenen Zweigen von Laubhölzern im Botanischen Garten XI. 1845 (B.), XII. 1861

(B.), bei der Ruine Plesse III. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Portugal, Algerien, Nordamerika, Guinea, Ceylon.

33. N. episphaeria (Tode) Fr. auf Diatrype Stigma bei Diemarden III. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Oesterreich, Frankreich, Italien, Nordamerika, Brasilien.

34. N. Peziza (Tode) Fr. auf faulendem Holz bei Mariaspring X. 1860 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika, Ceylon, Java.

35. **Hypomyces** aurantius (Pers.) Fuck. auf alten Polypori im Botanischen Garten zu Göttingen 1846 (N.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

36. **Hypocrea** contorta (Schwein.) B. et C. auf einem Eichenstamm in der Lieth bei Bovenden 1846 (B.). — Verbr.: bisher nur Großbritannien (Foxley Woods), Carolina (Buffalo).

37. H. citrina (Pers.) Fr. in der Eilenriede bei Hannover IX. 1828 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Nordamerika, Ceylon, Tasmanien.

38. **Polystigma** rubrum (Pers.) DC. auf lebenden Blättern von Prunus Padus bei Münden 1833 (Gr.); — ebenso auf Pr. domestica bei Ilfeld im Südharz 1843 (L.), bei Göttingen XI. 1860 (B.), auf dem Kl. Hagen 1889 ff. (P.), zwischen Appenrode und Gelliehausen am Wege 14. IX. 1905 und 28. I. 1906 (R.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Schweiz, Italien, Nordamerika.

39. **Epichloë** typhina (Pers.) Tul. auf lebenden Halmen von Gräsern bei Göttingen VIII. 1823 (B.), auf der Hörnekuppe bei Allendorf VII. 1884 (Falkenberg); — an Agrostis alba 28. VI. 1894 (P.); — an Poa nemoralis auf der Westseite des Rammelsberges im Leineholz bei Nörten 24. V. 1905 (R.); — an Dactylis glomerata bei Göttingen (P.), an der Chaussée zwischen Bursfelde und Hemeln 1. VI. 1905 (R.); — an Festuca gigantea im Göttinger Walde hinter dem Hainholzhof 11. VII. 1897 (P.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Sibirien, Nordamerika.

40. **Claviceps** purpurea (Fr.) Tul. bei Meensen 1833 (Gr.); auf Dactylis glomerata oberhalb Reyershausen 20. X. 1904 (R.), bei der Ruine der „Leisenberger Kirche“ 20. X. 1904 (R.); — auf Lolium perenne zwischen Eichenberg und dem Hanstein 11. X. 1896 (P.), am Rohnsweg bei Göttingen 17. XI. 1899 (P.), oberhalb

Eddigehausen 20. X. 1904 (R.), an Koppelwegen zwischen Göttingen und Weende 25. VIII. 1905 (R.), zwischen Bovenden und der Plesse 7. IX. 1905 (R.), am Fuß des Eschenberges bei Appenrode 14. IX. 1905 (R.), auf dem Hainberg gegen Kerstlingeröderfeld 21. IX. 1905 (R.), an der Chaussée nach Holtensen 26. IX. 1905 (R.), am Wege von Dransfeld nach Barterode 12. XI. 1905 (R.), am Verbindungswege zwischen Rosdorfer Chaussée und Groner Chaussée 19. XI. 1905 (R.); — auf Festuca gigantea im Haketal zwischen Waake und Ebergötzen 5. XI. 1905 (R.), bei Reinhausen zwischen Waldschlößchen und dem Hurkutstein IX. 1906 (P.); — auf Glyceria plicata bei Nörten 19. VII. 1890 (P.); — auf Secale cereale unweit Bischhausen bei Witzenhausen 26. VII. 1897 (P.), auf dem Kramberg bei Lenglern 1899 (P.), bei Nörten und Bovenden 1888/1907 (P.), im Werratal bei Oberrieden VII. 1907 (P.), zwischen Holtensen und Lenglern VII. 1902 (P.); — auf Elymus arenarius am Salzigen See bei Wansleben (Eisleben) 21. IX. 1896 (P.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika, Auckland. — [Die Perithecienträger haben sich im Göttinger Botanischen Garten mehrmals aus im Freien überwinterten Sklerotien leicht ziehen lassen.]

41. **Cordyceps** militaris (Linn.) Lk. auf Grasplätzen bei Waake 12. X. 1856 (B.), IX. 1860 und XI. 1873 (B.). — Verbr.: auf toten Schmetterlingspuppen in Deutschland, Finland, Schweden, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika, Ceylon, Borneo.

42. C. ophioglossoides (Ehrh.) Lk. auf Elaphomyces granulatus bei Münden 1833 (Gr.), in der Eilenriede bei Hannover bei Hanebuttsblock auf sandig-humosem Boden IX. 1844 (B.), Prinzenlaube über Wildemann im Oberharz 8. X. 1861 (B.), bei Celle in Eichenwäldern (Neustädter Holz) sehr selten IX. 1866 (N.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Belgien, Frankreich, Britannien, Italien, Nordamerika, Borneo.

III. Sphaeriaceae.

4. Chaetomieae.

43. **Chaetomium** elatum Kunze an feuchten Halmen im Botanischen Garten zu Göttingen III. 1847 (B.). — Verbr.: ganz Europa, Nordamerika.

5. Sordarieae.

44. **Sordaria** fimicola (Rob.) Sacc. auf Mistkulturen im Botanischen Institut zu Göttingen 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Südamerika.

6. Trichosphaeriaceae.

45. **Coleroa** Chaetomium (Kunze) Rbh. [= Venturia Kunzei Sacc.] auf Blättern von Rubus spec. in einer Schlucht bei Reyershausen 20. X. 1904 (R.); — auf Rubus caesius im Walde zwischen Ellershausen und dem Rischenkrug 12. XI. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien.

46. **Herpotrichia** nigra Hartig unter dem Schnee auf Picea excelsa im Nörtener Wald 1900 (P.), im Harzgebirge bei Oderbrück mit Perithecien 18. V. 1896 (P.), unter der Heinrichshöhe gegen Schierke, am Königsberge über der Eisenbahnstation Götheweg und sonst häufig 1889/1907 (P.). — Verbr.: Norwegen, Thüringen, Bayrische Alpen, Böhmerwald.

47. **Lasiosphaeria** hirsuta (Fr.) Ces. et de Not. auf faulendem Holz bei Göttingen 1835 (B.), im Hainholz bei Göttingen X. 1856 (B.); — auf faulendem Holz von Salix bei der Unteren Rodemühle XI. 1845 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

48. L. Rhacodium (Pers.) Ces. et de Not. auf faulendem Holz im Weender Holz bei Göttingen XII. 1865 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Italien, Sibirien, Carolina, Argentinien.

49. ? L. biformis (Pers.) Sacc. auf faulendem Holz bei Mariaspring XII. 1842 (B.), in der Lieth bei Bovenden XI. 1843 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien.

50. **Leptospora** spermoides (Hoffm.) Fuck. bei Hannover 1783 (Ehrh.); — auf Baumstümpfen bei Mariaspring 1. IV. 1844 (Gr.), in Wäldern bei Göttingen XI. 1845 (B.), im Rodetal 12. IV. 1856 (B.), in der Lieth bei Bovenden XI. 1868 (J.); — auf altem Baumstumpf am Wege von Deppoldshausen zur Plesse 18. II. 1905 (H. Schmidt). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Portugal, Nordamerika.

51. L. canescens (Pers.) Karst. auf altem Holz beim Dorfe Alt-Warmbüchen IX. 1849 (Br.). — Verbr.: Deutschland, Fin-

land, Schweden, Britannien, Frankreich, New York, Carolina, Californien.

7. Melanommeae.

52. **Rosellinia** Aquila (Fr.) de Not. auf faulenden Aesten bei Weendespring (olim „Weender Papiermühle") bei Göttingen XII. 1843 (B.). — Verbr.: ganz Europa, Nord- und Südamerika, Südasien.

53. R. thelena (Fr.) Rbh. an entrindeten Zweigen auf dem Selter zwischen Einbeck und Alfeld über Varrigsen IV. 1847 (B.). — Verbr.: spärlich in ganz Europa.

54. R. mammiformis (Pers.) Ces. et de Not. auf alten Aesten bei Neu Waake zwischen Roringen und dem Södderich III. 1843 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Belgien, Frankreich, Britannien, Italien, Nordamerika, Ceylon, Neuseeland.

55. **Bombardia** fasciculata Fr. auf Baumstümpfen in der Lieth bei Bovenden XI. 1843 (B.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

56. **Bertia** moriformis (Tode) de Not. in einem hohlen Stamm von Salix bei Göttingen XI. 1831 (B.); — auf altem Holz bei Göttingen Herbst 1835 (B.), in der Lieth bei Bovenden XI. 1843 und 1844 (B.); — an abgestorbenen Fichtenzweigen im Geismarer Holz IV. 1856 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika, Kamtschatka, Java.

57. **Melanopsamma** pomiformis (Pers.) Sacc. auf altem nacktem Holz von Fagus silvatica im Walde zwischen Rodetal und Hardenberg 6. V. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, südliches Finland, Schweden, Britannien, Frankreich, Oesterreich, Italien, Algerien, Nordamerika.

58. **Melamomma** Pulvis pyrius (Pers.) Fuck. auf altem Holz bei Göttingen 1842 (B.), im Geismarer Holz [auf Fagus] III. 1847 (B.), bei Mariaspring X. 1860 (B.); — auf dürrem Holz von Fagus silvatica im Pleßwalde gegen Reyershausen hin 20. X. 1904 (R.), im Steinbruch auf der Gräfenburg 12. XI. 1905 (R.); — auf abgestorbenen Zweigen von Acer platanoides Waldrand an der Chaussée zwischen Dransfeld und Barterode 12. XI. 1904 (R.)., — Verbr.: Deutschland, Lappland, Finland, Belgien, Frankreich Sibirien, Kamtschatka, Nordamerika.

59. M. ovoideum (Fr.) Fuck. [= Zignoella ovoidea Sacc.]

an Eichenholz gegen die Ruine Plesse III. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, südliches Finland, Schweden.

60. M. conicum Fuck. [= Zignoella conica Sacc.] auf entrindeten Zweigen von Sambucus im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1860 (B.). — Verbr.: nur bei Oestrich im Rheingau, in den Vogesen und im Französischen Jura.

8. Ceratostomeae.

61. **Ceratostomella** pilifera (Fr.) * dryina (Pers.) Wint auf faulendem Holz von Quercus in der Lieth bei Bovenden XII. 1843 (B.). — Verbr.: in Deutschland.

62. C. rostrata (Fr.) Sacc. auf faulenden Baumstümpfen im Göttinger Walde XI. 1845 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Frankreich, Italien, Nordamerika, Cuba.

63. C. cirrhosa (Pers.) Sacc. auf faulendem Laubholz in der Lieth bei Bovenden XI. 1860 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Amerika.

64. **Ceratosphaeria** lampadophora (Berk. et Br.) Niessl auf morschem Holz von Hedera Helix im Botanischen Garten zu Göttingen 13. IX. 1905 (R.). — Verbr.: nur in Britannien, Belgien und Schweiz beobachtet.

9. Amphisphaeriaceae.

65. **Amphisphaeria** applanata (Fr.) Ces. et de Not. auf faulen Baumstuken im Göttinger Walde XI. 1845 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Italien.

66. **Trematosphaeria** pertusa (Pers.) Fuck. auf abgestorbenen Zweigen von Fraxinus excelsior bei Deppoldshausen XI. 1856 (B.). — Verbr.: nicht selten in Deutschland, Finland, Belgien, Frankreich, Britannien, Italien.

10. Lophiostomeae.

67. **Lophiostoma** Arundinis (Fr.) Ces. et de Not. auf Halmen von Phragmites communis bei Göttingen II. 1847 (N.), IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien.

68. L. crenatum (Pers.) Fuck. [= Lophiotrema crenatum Sacc.] auf trockenem Holz von Betula im Hainholz bei Göttingen III. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Oesterreich, Italien.

69. L. excipuliforme (Fr.) Ces. et de Not. an dicker Rinde von Fagus silvatica in der Lieth bei Bovenden XI. 1861 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Frankreich, Italien.

70. L. compressum (Pers.) Ces. et de Not. [= Lophidium compressum Sacc.] auf dürren Zweigen von Tilia bei Mariaspring XII. 1842 (B.); — auf trockenen Zweigen bei Göttingen III. 1847 (B.); — auf abgeworfenen Zweigen von Fraxinus excelsior bei Göttingen III. 1847 (B.) — Verbr.: Deutschland, russisch Lappland, Finland, Schweden, Britannien, Frankreich, Oesterreich, Italien, Sibirien, Südamerika.

11. Cucurbitarieae.

71. **Cucurbitaria** Laburni (Pers.) Ces. et de Not. auf abgestorbenen Zweigen von Cytisus capitatus am Hainberg bei Göttingen II. 1847 (N.), IV. 1847 (B.), IV. 1856 (B.); — auf Cytisus Laburnum bei Witzenhausen VI. 1846 (B.), am Hainberg bei Göttingen zwischen Rohns und Warteberg 1888/1907 (P., R.), bei der Ruine Plesse 6. V. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien.

72. C. elongata (Fr.) Grev. auf abgestorbenen Zweigen von Robinia Pseudacacia in Göttingen 3. XI. 1867 (J.). — Verbr.: Deutschland, Britannien, Belgien, Frankreich, Schweiz, Oesterreich, Italien, Nordamerika.

12. Sphaerelloideae.

73. **Stigmatea** Robertiani Fr. auf lebenden Blättern von Geranium Robertianum bei Ilfeld im Harz VIII. 1843 (L.), an der Ruine Plesse II. 1869 (J.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Oesterreich, Italien, Nordamerika.

74. **Sphaerella** conglomerata (Wallr.) Rabh. auf abgefallenen Blättern von Alnus glutinosa bei Göttingen III. 1847 (B.), in der Lieth bei Bovenden XII. 1863 (B.). — Verbr.: Deutschland, Belgien, Britannien.

75. Sph. punctiformis (Pers.) Sacc. auf Blättern von Quercus in Wäldern bei Göttingen II. 1839 (B.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

76. Sph. maculiformis (Pers.) Auersw. auf Blättern von Quercus pedunculata und sessiliflora bei Göttingen XI. 1842 (B.), 3. XI. 1867 (J.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

77. **Laestadia** microspora (Auersw.) Sacc. auf Milium effusum an der Ruine Plesse im Walde X. 1905 (P.). — Verbr.: nur in Deutschland gefunden.

13. Pleosporeae.

78. **Didymosphaeria** conoidea Niessl. auf trockenen Stengeln von Angelica silvestris in der Lieth zwischen Lenglern und Bovenden 20. XI. 1904 (R.) — Verbr.: Deutschland, Frankreich, Italien.

79. **Leptosphaeria** culmicola (Fr.) Auersw. auf dürren Grashalmen (Poa pratensis?) an der Chaussée von Eddigehausen nach Reyershausen unterhalb der Burgruine Plesse 10. V. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Frankreich, Italien.

80. L. Coniothyrium (Fuck.) Sacc. auf abgestorbenen Zweigen von Menispermum canadense im Botanischen Garten zu Göttingen XII. 1846 (B.). — Verbr.: Deutschland, Frankreich, Italien, Portugal.

81. L. culmifraga (Fr.) Ces. et de Not. auf Dactylis glomerata am Wege zwischen Dransfeld und Barterode 12. XI. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Lappland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

82. L. sparsa (Fuck.) Sacc. auf Grashalmen bei Göttingen III. 1847 (B.). — Verbr.: Schweiz.

83. L. arundinacea (Sow.) Sacc. auf dürren Halmen von Phragmites communis an der Werra bei Witzenhausen und unterhalb Witzenhausen 14. X. 1904 (R.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika, Kamtschatka, Borneo.

84. L. Doliolum (Pers.) Ces. et de Not. auf trockenen Stengeln von Urtica bei Reinhausen III. 1847 (B.); — auf trockenen Pflanzenstengeln im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1860 (B.); — auf trockenen Stengeln von Angelica silvestris in der Lieth zwischen Bovenden und Lenglern 20. XI. 1904 (R.); — auf Urtica dioica im Dorfe Rimbach bei der Ruine Hanstein 16. XI. 1904 (R.), am Graben neben der Chaussée von Eddigehausen nach Reyershausen unterhalb der Ruine Plesse 10. V. 1905 (R.), am Ausgange des Dorfes Benniehausen gegen Gelliehausen hin 28. I. 1906 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Carolina.

85. L. dumetorum Niessl. auf abgestorbenen Stengeln von Cirsium oleraceum zwischen Lenglern und Bovenden 20. XI. 1904

(R.). — auf Clematis Vitalba zwischen Eddigehausen und Reyershausen unterhalb der Plesse 10. V. 1905 (R.). — Verbr.: Mähren, Britannien, Italien.

86. L. coniformis (Fuck.) Wint. [= Metasphaeria coniformis Sacc.] auf trockenen Aesten von Hedera Helix im Hainholz bei Göttingen XI. 1840 (B.). — Verbr.: nur bei Budenheim auf Euphrasia lutea.

87. L. maculans (Desmaz.) Ces. et de Not.. auf dürren Stengeln von Alliaria officinalis oberhalb Oberbillingshausen auf dem Wege von der Ratsburg nach den Lippbergen 10. V. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Portugal.

88. L. planiuscula (Riess) Ces. et de Not. an dürren Stengeln von Solidago Virgaurea am Eschenberge bei Bremke 14. IX. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweiz.

89. L. Baggei (Auserw.) Sacc. auf Rinde von Salix an der Werra bei Witzenhausen 14. X. 1904 (R.). — Verbr.: Frankfurt a. M., Graz, Brünn.

90. L. acuta (Moug. et Nestl.) Karst. auf dürren Stengeln von Urtica nahe bei Bovenden IV. 1841 (B.), beim Reinsbrunnen 26. II. 1905 (R.), an den Erdfällen bei Moringen 15. III. 1906 (R.), unter dem Rohns bei Göttingen auf Urtica dioica 6. III. 1907 (R.); am Grunde abgestorbener feuchtliegender Stengel von Urtica dioica und U. gracilis im Botanischen Garten zu Göttingen 15. I. 1906 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Virginien.

91. **Pleospora** vulgaris Niessl. auf Lappa tomentosa im Chausséegraben zwischen Landwehr- und Garteschenke 10. VII. 1905 (R.). — Verbr.: Schweden, Britannien, Frankreich, Mähren, Italien.

92. P. herbarum (Pers.) Rabh. auf toten Stengeln von Chaerophyllum bulbosum bei Göttingen (J.); — auf abgestorbenen Stengeln von Heracleum Sphondylium im Rohnswäldchen bei Göttingen 26. II. 1905 (R.); — auf dürren Stengeln von Solidago Virgaurea auf dem Eschenberge bei Bremke 14. IX. 1905 (R.). — Verbr.: sehr verbreitet in Deutschland, Finland, Schweden, Spitzbergen, Britannien, Frankreich, Schweiz, Italien, Portugal, Sibirien, Nord- und Südamerika, Java, Neuseeland.

93. **Ophiobolus** porphyrogonus (Tode) Sacc. an abgestorbenen Stengeln im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1865 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika, Südamerika.

94. O. herpotrichus (Fr.) Sacc. an Schilfhalmen bei Göttingen III. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Frankreich, Italien.

14. Massarieae.

95. **Massaria** inquinans (Tode) Ces. et de Not. auf trockenen Zweigen von Pirus communis in Göttingen IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien (sonst nur auf Acer).

15. Clypeosphaeriaceae.

96. **Clypeosphaeria** mamillana (Fr.) Lambotte auf dürren Zweigen von Cornus bei Göttingen 1846 (N.). — Verbr.: Britannien, Belgien.

97. **Hypospila** Pustula (Pers.) Karst. auf Blättern von Quercus über Elliehausen IV. 1847 (B.), im Göttinger Walde 14. IV. 1847 (Gr.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Italien, Amerika.

16. Gnomonieae.

98. **Gnomonia** setacea (Pers.) Ces. et de Not. auf dürren Blättern von Tilia in Göttingen XII. 1842 (B.), bei „Kochslust" XI. 1844 (B.). — Verbr.: ganz Europa.

99. G. vulgaris Ces. et de Not. [= Gnomoniella vulgaris Sacc.] auf faulenden Blättern von Corylus Avellana im Göttinger Walde IV. 1847 (B.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

100. **Cryptoderis** melanostyla (DC.) Wint. [= Gnomoniella melanostyla Sacc.] auf abgestorbenen Lindenblättern bei Kl. Lengden 14. IV. 1847 (Gr.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Frankreich, Nordamerika.

17. Valseae.

101. **Diaporthe** linearis (Nees) Nitschke auf dürren Stengeln von Solidago Virgaurea im Steinbruch am Eschenberge bei Appenrode 14. X. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Oesterreich, Belgien.

102. D. fasciculata Nitschke auf abgestorbenen Zweigen von Robinia Pseudacacia am Kreuzberg bei Göttingen 16. II. 1908 (P.). — Verbr.: Deutschland, Frankreich, Italien, Südamerika.

103. D. dryophila (Niessl) Sacc. auf abgestorbenen feuchtliegenden Zweigen von Quercus am Kuhberge bei Esebeck 20. XI. 1904 (R.). — Verbr.: nur in Steiermark bei Voitsberg.

104. D. leiphaema (Fr.) Sacc. auf abgestorbenen Zweigen von Quercus bei Göttingen 1842 (B.), in der Nähe von Zella bei Münden 14. X. 1904 (R.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

105. D. fibrosa (Pers.) Fuck. auf Zweigen von Prunus spinosa bei Göttingen 1847 (N.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, auf Rhamnus cathartica.

106. D. Strumella (Fr.) Fuck. auf abgestorbenen Zweigen von Ribes rubrum im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1845 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

107. D. Betuli (Pers.) Wint. auf trockenen Zweigen von Carpinus Betulus dicht am Hainholzhof bei Göttingen IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Belgien, Frankreich, Italien.

108. D. salicella (Fr.) Sacc. auf abgestorbenen Zweigen von Salix bei Göttingen X. 1867 (J.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Oesterreich, Italien, Nordamerika.

109. D. conjuncta (Nees) Fuck. auf trockenen Zweigen von Corylus Avellana im Geismarer Holz I. 1866 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Belgien, Italien.

110. D. Hystrix (Tode) Fuck. auf trockenen Zweigen von Acer Pseudoplatanus bei Hannover 1793 (Ehrhart). — Verbr.: Vogesen, Norditalien (Belluno).

111. **Mamiania** fimbriata (Pers.) Ces. et de Not. [= Gnomoniella fimbriata Sacc.] auf Carpinus Betulus bei Göttingen XI. 1840 (B.), XI. 1842 (B.), in der Lieth bei Bovenden XI. 1864 (B.), XI. 1867 (J.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

112. **Valsa** spinosa (Pers.) Nitschke [= Eutypa spinosa Sacc.] an faulen Baumwurzeln auf dem Selter zwischen Einbeck und Alfeld IV. 1827 (B.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

113. V. Eutypa (Achar.) Nitschke [= Eutypa Acharii Tul.] auf entrindeten Zweigen von Tilia im Botanischen Garten zu Göttingen IV. 1847 (B.). — Verbr.: ganz Europa und Nordamerika.

114. V. flavovirens Nitschke [= Eutypa flavovirescens (Hoffm.) Tul.] auf dürrem Holz und abgefallenen Zweigen bei Göttingen XII. 1842 (B.), im Rodetal III. 1847 (B.), auf dem Hohen-

hagen X. 1856 (B.), XI. 1865 (B.), auf dem Selter zwischen Alfeld und Einbeck IV. 1847 (B.), bei Unterlüß 2. IX. 1856 (B.). — Verbr.: in ganz Europa.

115. V. lata (Pers.) Nitschke [= Eutypa lata Sacc.] auf altem Holz im Selter zwischen Einbeck und Alfeld IV. 1847 (B.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

116. V. eunomia (Fr.) Nitschke [= Cryptosphaeria millepunctata Grev.] auf abgeworfenen Zweigen von Alnus über Varrigsen im Selter IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Frankreich, Italien, Portugal.

117. V. stellulata Fr. [= Eutypella stellulata Sacc.] auf abgeworfenen Zweigen von Ulmus bei Göttingen 1845 (N.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

118. V. dolosa (Fr.) Nitschke auf entrindeten Zweigen im Botanischen Garten zu Göttingen 1847 (N.). — Verbr.: nur bei Münster beobachtet.

119. V. salicina (Pers.) Fr. auf trockenen Zweigen von Salix in Göttingen XI. 1842 (B.), an der Werra oberhalb und unterhalb Witzenhausen 14. X. 1904 (R.); — auf Salix vitellina am Wendebach bei Reinhausen 22. X. 1904 (R.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

120. V. ambiens (Pers.) Fr. auf abgestorbenen Zweigen von Crataegus in Göttingen XII. 1842 (Gr.); — auf abgeworfenen faulenden Zweigen in Göttingen III. 1847 (B.); — auf Rinde von Pirus Malus in Göttingen II. 1847 (B.). — Verbr.: ganz Europa.

121. V. Persoonii Nitschke [= V. leucostoma (Pers.) Fr.] auf abgestorbenen Zweigen von Prunus Cerasus im Botanischen Garten zu Göttingen XII. 1843 (B.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

122. V. nivea (Pers.) Fr. auf Baumrinde in Göttingen 1841 (B.); auf Rinde von Populus bei Mariaspring 1. IV. 1844 (Gr.). — Verbr.: fast ganz Europa und Nordamerika.

123. V. cincta Fries auf abgeworfenen Zweigen von Prunus avium auf dem Hainberg bei Göttingen 1. XII. 1861 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Frankreich.

124. V. ceratophora Tul. * Rosarum de Not. auf dürren Aesten von Rosa am Kuhberg bei Elliehausen 20. XI. 1906 (R.). — Verbr. der Art: ganz Europa, Nordamerika, Ceylon; — der Varietät: Deutschland, Britannien, Frankreich, Italien.

125. **Anthostoma** Xylostei (Pers.) Sacc. auf trockenen Zweigen von Lonicera Xylosteum bei Mariaspring XII. 1842 (B.),

1. IV. 1844 (Gr.), bei Göttingen X. 1867 (J.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Algerien.

18. Melanconideae.

126. **Hercospora** Tiliae (Pers.) Fr. auf abgestorbenen Zweigen von Tilia im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1846 (B.), bei Kl. Lengden 14. IV. 1847 (Gr.), an der Hube bei Einbeck IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien.

127. **Pseudovalsa** lanciformis (Fr.) Ces. et de Not. an Rinde von Betula alba in Weendespring bei Göttingen III. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Sibirien.

19. Melogrammeae.

128. **Melogramma** spiniferum (Wallr.) de Not. auf Rinde von Fagus silvatica in der Lieth bei Bovenden XI. 1861 (B.), 11. III. 1867 (J.), auf Rinde der Wurzeln von Fagus bei der Ruine Plesse 6. XI. 1904 (R.), auf dem Hohenhagen bei Dransfeld XI. 1865 (B.); — am Grunde eines noch grünen Stumpfes von Fagus im Wald zwischen Deppoldshausen und der Plesse 6. V. 1905 (R.), ebenso am Mühlenberge bei Bremke 14. IX. 1905 (R.); — auf der Rinde eines kleinen Stämmchens von Fagus auf der Gräfenburg bei Barterode 12. XI. 1905 (R.), auf Buchenästen auf dem Kanstein bei Salzhemmendorf IV. 1840 (B.). — Verbr.: Deutschland, Britannien, Frankreich, Italien.

129. **M.** ferrugineum (Pers.) Ces. et de Not. [= Sillia ferruginea Karst.] auf abgefallenen Zweigen von Crataegus am Hainholzhof bei Göttingen IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

20. Diatrypeae.

130. **Quaternaria** Persoonii Tul. auf abgestorbenen Zweigen von Fagus silvatica bei Göttingen XI. 1842 (B.), in einer Schlucht in der Nähe von Zella bei Münden 14. X. 1904 (R.), am Mühlenberge bei Bremke 14. XI. 1905 (R.), im Siebertal bei Herzberg im Harz 3. X. 1907 (P.). — Verbr.: Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Schweiz, Italien, Nordamerika.

131. Q. dissepta (Fr.) Tul. auf dürren Zweigen bei Göttingen III. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Belgien, Frankreich, Nordamerika.

132. **Diatrypella** quercina (Pers.) Nitschke auf dürrem Holz von Quercus am Westberg bei Harste 8. VII. 1905 (R.), am Waldrande oberhalb Geismar 16. IX. 1905 (R.), dicht bei Appenrode 14. IX. 1905 (R.). — Verbr.: ganz Europa und Nordamerika.

133. D. aspera (Fr.) Nitschke auf der Rinde trockener Zweige von Fagus silvatica im Pleßwalde gegen Reyershausen 20. X. 1904 (R.), im Bremkertal 20. XI. 1904 (Quelle), beim Basaltsteinbruch auf der Gräfenburg 12. XI. 1905 (R.). — Verbr: Deutschland, Schweden, Britannien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

134. D. verruciformis (Ehrh.) Nitschke auf dürren Aesten bei Kl. Lengden 14. XI. 1847 (Gr.), im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1865 (B.), bei Göttingen II. 1869 (J.). — Verbr.: ganz Europa, Nordamerika, Südamerika.

135. **Diatrype** Stigma (Hoffm.) de Not. auf Zweigen von Fagus silvativa bei Diemarden III. 1847 (B.), bei Göttingen IV. 1856 (B.), am Kuhberg bei Elliehausen 20. XI. 1904 (R.); — auf altem Holz an der Werra bei Witzenhausen 14. X. 1904 (R.); — auf Crataegus oxyacantha am Kuhberg bei Elliehausen 20. X. 1904 (R.); — bei Hannover (Ehrhart). — Verbr.: ganz Europa, Sibirien und Nordamerika.

136. D. disciformis (Hoffm.) Fr. auf dürren Zweigen von Fagus silvatica bei Göttingen II. 1839 (B.), auf dem Hohenhagen bei Dransfeld III. 1868 (J.), an der Ratsburg bei Reyershausen 10. V. 1905 (R.), im Bramwald bei der Ruine Bramburg 1. VI. 1903 (R.), im Bremkertal vom Waldschlößchen gegen die Gleichen 22. X. 1904 (R.), im Pleßwalde gegen Reyershausen 20. X. 1904 (R.), auf der Gräfenburg dicht beim Steinbruch 12. XI. 1905 (R.), auf dem Hainberg bei Göttingen 13. VI. 1903 (R.), am Mühlenberg bei Bremke 14. IX. 1905 (R.), auf dem Knüll 30. VII. 1905 (R.), im Siebertal bei Herzberg im Harz 3. X. 1907 (P.), Waldrand zwischen Barterode und Dransfeld 12. XI. 1905 (R.). — Verbr.: ganz Europa und Nordamerika.

137. D. bullata (Hoffm.) Fr. auf trockenem Holz bei Hannover (Ehrhart). — Verbr.: spärlich in ganz Europa und Nordamerika.

21. Xylarieae.

138. **Hypoxylon** udum (Pers.) Fr. auf morschem Holz von Quercus bei der Papiermühle von Eberhausen 15. X. 1856 (B.), auf dem Selter zwischen Einbeck und Alfeld IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Ostindien, Borneo.

139. H. semiimmersum Nitschke auf Rinde von Fagus silvatica im Walde zwischen Weende und Deppoldshausen 20. VI. 1904 (R.). — Verbr.: bisher nur bei Münster und Oestrich und in Neuseeland.

140. H. serpens (Pers.) Fr. auf morschem Holz von Salix nahe bei Geismar XII. 1842 (B.), bei Unterlüß 2. IX. 1856 (B.); — auf morschem Holz von Fagus oberhalb Reyershausen 20. X. 1904 (R.), auf der Gräfenburg bei Barterode 12. XI. 1905 (R.) — Verbr.: ganz Europa, Sibirien, Borneo, New-Jersey, Alabama, Californien, Argentinien.

141. H. multiforme Fr. auf altem Holz nahe bei Westerhof IV. 1843 (B.), bei Mariaspring X. 1860 (B.); — auf altem Stumpf (Hirnschnitt) von Fagus silvatica im Walde zwischen dem Rodetal und Hardenberg 6. V. 1905 (R.). — Verbr.: ganz Europa, Kamtschatka, Nordamerika, Ostindien, Nepal.

142. H. cohaerens (Pers.) Fr. auf dicker Rinde von Fagus silvatica bei Göttingen Herbst 1835 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Schweiz, Italien, New-York, Carolina, Borneo, Java.

143. H. rubiginosum (Pers.) Fr. auf Holz von Fraxinus excelsior am Hohenhagen bei Dransfeld X. 1856 (B.), Selter zwischen Einbeck und Alfeld IV. 1847 (B.). — Verbr.: fast ganz Europa, Taurien, Algerien, Carolina, Texas, Californien, Cuba, Java, Ceylon.

144. H. fuscum (Pers.) Fr. auf Alnus? bei Göttingen XI. 1841 (B.), an der Werra bei Witzenhausen 14. X. 1904 (R.); — auf trockenen Aesten von Alnus im Walde zwischen Reyershausen und Sudershausen 20. X. 1904 (R.); — auf Buchenrinde bei Göttingen 1841 (B.); — Hannover (Ehrhart); — Selter zwischen Einbeck und Alfeld IV. 1847 (B.); — auf Corylus Avellana bei Adelebsen 16. IV. 1851 (Gr.), im Gösselgrunde des Göttinger Waldes 5. X. 1904 (R.), auf dürrem berindetem Holz von Corylus am Wege von Dransfeld zur Gräfenburg 12. XI. 1905 (R.). — Verbr.: ganz Europa, Nordamerika, Afrika.

145. H. Botrys Nitschke auf altem Holz im Rodetal bei Nörten III. 1847 (B.). — Verbr.: nur Schwerin, Münster, Oestrich.

146. H. coccineum Bill. auf dicker Rinde von Fagus silvatica beim Forsthaus Grimmerfeld im Solling 9. X. 1904 (R.), auf altem Buchenstumpf am Steinbruch auf der Gräfenburg nach Barterode zu 12. XI. 1905 (R.), auf trockenen Buchenästen im Bramwald bei der Bramburg 1. VI. 1905 (R.), im Siebertal bei Herzberg 3. X. 1907 (P.), an der Mackenröder Spitze 21. IX. 1905 (R.); — auf dürren Aesten von Alnus an der Werra gegenüber Zella bei Münden 14. X. 1904 (R.). — Verbr.: fast ganz Europa, Nordamerika, arktisches Amerika, Cuba, Ostindien, Tasmanien.

147. **Ustulina** vulgaris Tul. an alten Baumstümpfen an der Ratsburg 12. V. 1838 (Gr.), in der Lieth bei Bovenden XI. 1864 (B.), bei Göttingen 3. II. 1867 (J.), im Pleßwalde XII. 1888 (P.), im Walde bei Eddigehausen 12. III. 1898 (P.), im Botanischen Garten zu Göttingen 9. V. 1898 (P.), im Nörtener Walde IV. 1890 (P.), Gräfenburg bei Barterode auf Buchenstuken 12. XI. 1905 (R.), auf dem Hainberg 5. III. 1905 (P.). — Verbr.: ganz Europa, Nordamerika, Cuba, Guiana, Venezuela, Juan Fernandez, Ceylon.

148. **Poronia** punctata (L.) Fr. auf altem Pferdemist zwischen Bemerode und Anderten bei Hannover Frühling 1827 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Dalmatien, Sibirien, Natal.

149. **Xylaria** Hypoxylon (L.) Grev. an alten Baumstümpfen bei Hannover (Ehrhart), in der Lieth bei Bovenden XI. 1868 (J.), im Walde gegen Mackenrode 9. IX. 1889 (P.), im Botanischen Garten zu Göttingen an Salix 25. I. 1892, an Fagus silvatica 20. XII. 1907 (P.), im Göttinger Walde 1902 und 12. X. 1903 (P.), im Gösselgrund bei Kerstlingeröderfeld 5. X. 1904 (R.), im Bremkertal zwischen Waldschlößchen und Gleichen 22. X. 1904 (R.), an der Langen Nacht bei Göttingen XI. 1907 massenhaft (P.), bei Kerstlingeröderfeld, Gr. Lengden, im Plesseforst etc. 1888/1907 sehr häufig (P.). — Verbr.: ganz Europa, Nordamerika, Südamerika, Cuba, Südasien, Java, Natal, Australien.

150. X. carpophila (Pers.) Fr. auf alten Fruchthüllen von Fagus silvatica bei Münden 1832 (B.), im Rodetal IV. 1864 (B.), auf dem Langfast bei Northeim 20. X. 1904 (R.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika, Ceylon.

151. X. digitata (L.) Grev. an altem Holz bei Göttingen 16. VI. 1896 (Augener). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Frankreich, Schweiz, Italien, Nordamerika, Brasilien, Ceylon, Java.

152. X. longipes Nitschke an Kübeln aus Eichenholz in den Gewächshäusern des Botanischen Gartens zu Göttingen 1888/1907 (P.) [ebenso zu München, Berlin etc.]. — Verbr.: sonst an abgefallenen Aesten von Acer Pseudoplatanus, Fagus und Carpinus in Westfalen und Rheinpreußen.

153. X. polymorpha (Pers.) Grev. an altem Holz bei Meensen (Wissmann), im Göttinger Walde 1902 (P.), auf altem Buchenstumpf am Aufstieg zur Ruine Plesse von Mariaspring aus 6. IX. 1905 (R.), hinter dem Hainholzhof gegen den Gerberstieg hin bei Göttingen 24. X. 1905 (H. Schmidt), im Botanischen Garten an Eichenholz 1894 und IX. 1906 (P.), auf dem Albanikirchhof an altem Laternpfahl 23. VII. 1906 (Quelle). — Verbr.: ganz Europa. Nordamerika, Südamerika, Südasien, Java, Australien, Tasmanien.

* acrodactyla Nitschke an einem kranken Citrus im Botanischen Garten XII. 1907 (P.).

** hypoxylea Nitschke an Eichenkübeln im Botanischen Garten XII. 1907 (P.).

IV. Dothideaceae.

21. Dothideae.

154. **Phyllachora** Graminis (Pers.) Fuck. auf Elymus europaeus am Hohenhagen 1841 (B.), bei Neu-Waake zwischen Roringen und Södderich XI. 1865 (B.), im Göttinger Walde 5. XI. 1905 (R.), am Wege von der Lengdener Burg nach Gr. Lengden 28. I. 1906 (R.); — auf Triticum repens auf dem Hainberg bei Göttingen 31. I. 1906 (R.); — auf Gräsern am Wege nach dem Kaiser Wilhelm-Park bei Göttingen 3. XII. 1905 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Portugal, Sibirien, Dekkan, Ceylon, Nordamerika, Cuba, Südamerika.

155. Ph. Junci (Fr.) Fuck. auf Juncus glaucus am Hainholzhof bei Göttingen IV. 1847 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Amerika.

156. Ph. Heraclei (Fr.) Fuck. auf Blättern von Heracleum Sphondylium am Fuß des Hainberges bei Göttingen XI. 1865 (B.). — Verbr.: Deutschland, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Sibirien.

157. Ph. Podagrariae (Roth) Karst. auf lebenden Blättern von Aegopodium Podagraria bei Weendespring XII. 1843 (B.), am Hohenhagen bei Dransfeld XI. 1865 (B.), bei Göttingen

X. 1867 (J.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien.

158. Ph. Angelicae (Fr.) Fuck. auf Blättern von Angelica silvestris in der Lieth bei Bovenden XI. 1868 (B., J.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Frankreich, Italien, Sibirien, nördliche Mongolei, Kamtschatka.

159. Ph. Trifolii (Pers.) Fuck. auf Blättern von Trifolium spec. bei Neu-Waake zwischen Roringen und dem Södderich XI. 1865 (B.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Nordamerika, Sibirien.

160. **Dothidea** Sambuci (Pers.) Fr. auf dürren Zweigen von Sambucus nigra bei Meensen 1832 (B.). — Verbr.: Deutschland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Siebenbürgen, Italien, Nordamerika.

161. D. ribesia (Pers.) Fr. [= Plowrightia ribesia Sacc.] an dürren Zweigen von Ribes rubrum im Botanischen Garten zu Göttingen XI. 1842 (B.), im Werrathal bei Witzenhausen 14. X. 1904 (R.). — Verbr.: Deutschland, Finland, Schweden, Britannien, Belgien, Frankreich, Italien, Nordamerika.

162. **Scirrhia** rimosa (Alb. et Schwein.) Fuck. auf dürren Blattscheiden von Phragmites communis am Teich von Gr. Thiershausen bei Catlenburg 9. VI. 1902 (P.). — Verbr.: Finland, Schweden, Britannien, Frankreich, Italien.

Tuberaceae.

22. Eutuberaceae.

163. **Tuber** aestivum Vitt. in Rotbuchenwäldern bei Witzenhausen VIII. 1884 (S.), beim Schloß Berlepsch 1885 (S.), Weende bei Göttingen 1888 (P.), Everode bei Freden 22. XI. 1890 ff. (P.), im Ith bei Bremke 4. XI. 1898 (P.), im Hainholz bei Göttingen unweit des Hainholzhofes, bei Kerstlingeröderfeld und Gr. Lengden XII. 1899 (P.), bei Mollenfelde XI. 1907 (P.). — Verbr.: Deutschland (Prov. Sachsen, Prov. Hannover, Hessen-Nassau, Anhalt, Schwarzburg-Sondershausen, ? Schlesien, Baden, Elsaß), Böhmen, Schweizer Jura, Genf, Norditalien.

164. T. excavatum Vitt. in Buchenwäldern bei Everode bei Freden XII. 1896, 1898 ff. (P.), am Ith bei Bremke 4. XI. 1898 (P.). — Verbr.: Deutschland, Böhmen, Schweiz.

23. Elaphomyceteae.

165. **Elaphomyces** granulatus Fr. in Nadelholzwäldern bei Münden 1833 (Gr.), Hannover 1844 (B.), Celle 1866 (N.), Wildemann im Harz 1861 (B.). — Verbr.: Deutschland, Oesterreich, Schweiz.

24. Onygeneae.

166. **Onygena** corvina Alb. et Schwein. auf Raubvogelgewöll in der Lieth bei Bovenden X. 1879, 10. III. 1881 (S.). — Verbr.: Dänemark (Seeland), Berlin, Leipzig, Schlesien, Schweiz.

Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.

Von

Hermann Minkowski.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Dezember 1907.

Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper herrschen zur Zeit noch Meinungsverschiedenheiten. Die Ansätze von Hertz[1]) (1890) mußten verlassen werden, weil sich herausgestellt hat, daß sie mit verschiedenen experimentellen Ergebnissen in Widerspruch geraten.

1895 publizierte H. A. Lorentz[2]) seine Theorie der opti-

---

1) Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wiedemanns Ann. 41. p. 369. 1890 (auch in: Ges. Werke Bd. I. p. 256. Leipzig 1892).

2) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.



schen und elektrischen Erscheinungen in bewegten Körpern, die, auf atomistischer Vorstellung von der Elektrizität fußend, durch ihre großen Erfolge die kühnen Hypothesen, von denen sie getragen und durchsetzt wird, zu rechtfertigen scheint. Die Lorentzsche Theorie[1]) geht aus von gewissen ursprünglichen Gleichungen, die an jedem Punkte des „Äthers" gelten sollen und gelangt daraus durch Mittelwertsbildungen über „physikalisch unendlich kleine" Bereiche, die schon zahlreiche „Elektronen" enthalten, zu den Gleichungen für die Vorgänge in ponderablen Körpern.

Insbesondere gibt sich die Lorentzsche Theorie Rechenschaft von der Nichtexistenz einer Relativbewegung der Erde gegen den Lichtäther; sie bringt diese Tatsache in Zusammenhang mit einer Kovarianz jener ursprünglichen Gleichungen bei gewissen gleichzeitigen Transformationen der Raum- und Zeitparameter, die von H. Poincaré[2]) den Namen Lorentz-Transformationen erhalten haben. Für jene ursprünglichen Gleichungen ist die Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen eine rein mathematische Tatsache, die ich das Theorem der Relativität nennen will; dieses Theorem beruht wesentlich auf der Gestalt der Differentialgleichung für die Fortpflanzung von Wellen mit Lichtgeschwindigkeit.

Nun kann man, ohne noch zu bestimmten Hypothesen über den Zusammenhang von Elektrizität und Materie sich zu bekennen, erwarten, jenes mathematisch evidente Theorem werde seine Konsequenzen soweit erstrecken, daß dadurch auch die noch nicht erkannten Gesetze in Bezug auf ponderable Körper irgendwie eine Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen übernehmen werden. Man äußert damit mehr eine Zuversicht, als bereits eine fertige Einsicht, und diese Zuversicht will ich das Postulat der Relativität nennen. Die Sachlage ist erst ungefähr eine solche, als wenn man die Erhaltung der Energie postuliert in Fällen, wo die auftretenden Formen der Energie noch nicht erkannt sind.

Gelangt man hernach dazu, die erwartete Kovarianz als einen bestimmten Zusammenhang zwischen lauter beobachtbaren Größen bei bewegten Körpern zu behaupten, so mag alsdann dieser bestimmte Zusammenhang das Prinzip der Relativität heißen.

---

1) Vgl. Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. V 2, Art. 14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie.

2) Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129.

Diese Unterscheidungen scheinen mir nützlich, um den gegenwärtigen Stand der Elektrodynamik bewegter Körper charakterisieren zu können.

H. A. Lorentz hat das Relativitätstheorem gefunden und das Relativitätspostulat geschaffen, als eine Hypothese, daß Elektronen und Materie infolge von Bewegung Kontraktionen nach einem gewissen Gesetze erfahren.

A. Einstein[1]) hat es bisher am schärfsten zum Ausdruck gebracht, daß dieses Postulat nicht eine künstliche Hypothese ist, sondern vielmehr eine durch die Erscheinungen sich aufzwingende neuartige Auffassung des Zeitbegriffs.

Das Prinzip der Relativität jedoch in dem von mir gekennzeichneten Sinne ist für die Elektrodynamik bewegter Körper bisher noch gar nicht formuliert worden. *In der gegenwärtigen Abhandlung erhalte ich, indem ich dieses Prinzip formuliere, die Grundgleichungen für bewegte Körper in einer durch dieses Prinzip völlig eindeutig bestimmten Fassung. Dabei wird sich zeigen, daß keine der bisher für diese Gleichungen angenommenen Formen sich diesem Prinzipe genau fügt.*

Man sollte vor Allem erwarten, daß die von Lorentz angegenommenen Grundgleichungen für bewegte Körper dem Relativitätspostulate entsprächen. Es zeigt sich indeß, daß dieses nicht der Fall ist für die allgemeinen Gleichungen, die Lorentz für beliebige, auch magnetisierte Körper hat, daß es aber allerdings approximativ (unter Vernachlässigung der Quadrate der Geschwindigkeiten der Materie gegen das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit) der Fall ist für diejenigen Gleichungen, die Lorentz hernach für nichtmagnetisierte Körper erschließt; es kommt aber diese spätere Anpassung an das Relativitätspostulat wieder nur dadurch zu Stande, daß die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins ihrerseits in einer dem Relativitätspostulate nicht entsprechenden Weise angesetzt wird, also durch eine zufällige Kompensation zweier Widersprüche gegen das Relativitätspostulat. Indessen bedeutet diese Feststellung keinerlei Einwand gegen die molekulartheoretischen Hypothesen von Lorentz, sondern es wird nur klar, daß die Annahme der Kontraktion der Elektronen bei Bewegung in der Lorentzschen Theorie schon an einer früheren Stelle, als dieses durch Lorentz geschieht, eingeführt werden müßte.

---

1) Ann. d. Phys. 17, p. 891, 1905.

In einem Anhange gehe ich noch auf die Stellung der klassischen Mechanik zum Relativitätspostulate ein. Eine leicht vorzunehmende Anpassung der Mechanik an das Relativitätspostulat würde für die beobachtbaren Erscheinungen kaum merkliche Differenzen ergeben, würde aber zu einem sehr überraschenden Erfolge führen: *Mit der Voranstellung des Relativitätspostulates schafft man sich genau das hinreichende Mittel, um hernach die vollständigen Gesetze der Mechanik allein aus dem Satze von der Erhaltung der Energie* (und Aussagen über die Formen der Energie) *zu entnehmen.*

§ 1. Bezeichnungen.

Ein Bezugsystem x, y, z, t rechtwinkliger Koordinaten im Raume und der Zeit sei gegeben. Die Zeiteinheit soll in solcher Beziehung zur Längeneinheit gewählt sein, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume 1 ist.

Obwohl ich an sich vorziehen würde, die von Lorentz gebrauchten Bezeichnungen nicht zu ändern, scheint es mir doch wichtig, gewisse Zusammengehörigkeiten durch eine andere Wahl der Zeichen von vorn herein hervortreten zu lassen. Ich werde den Vektor

> der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$, der magnetischen Erregung $\mathfrak{M}$, der elektrischen Erregung $\mathfrak{e}$, der magnetischen Kraft $\mathfrak{m}$

nennen, sodaß also $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$ an die Stelle von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ bei Lorentz treten sollen.

Ich werde mich ferner des Gebrauchs komplexer Größen in einer Weise, wie dies bisher in physikalischen Untersuchungen noch nicht üblich war, bedienen, namentlich statt mit t mit der Verbindung it operieren, wobei i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeute. Andererseits werden ganz wesentliche Umstände in Evidenz treten, indem ich eine Schreibweise mit Indizes benutzen werde, nämlich oft an Stelle von

$$x, y, z, it \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4$$

setzen und hierauf einen allgemeinen Gebrauch der Indizes 1, 2, 3, 4 gründen werde. Dabei wird es sich, wie ich ausdrücklich hervorhebe, stets nur um eine übersichtlichere Zusammenfassung rein reeller Beziehungen handeln, und der Übergang zu reellen Gleichungen wird sich überall sofort voll-

ziehen lassen, indem von den Zeichen mit Indizes solche mit einem Index 4 stets rein imaginäre Werte, solche mit keinem Index 4 oder mit zwei Indizes 4 stets reelle Werte bedeuten werden.

Ein einzelnes Wertsystem x, y, z, t bez. x_1, x_2, x_3, x_4 soll ein Raum-Zeitpunkt heißen.

Ferner bezeichne $\mathfrak{w}$ den Vektor Geschwindigkeit der Materie, ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit der Materie, sämtlich als Funktionen von x, y, z, t (oder x_1, x_2, x_3, x_4) gedacht, weiter ϱ die elektrische Raumdichte, $\mathfrak{s}$ einen Vektor „elektrischer Strom", zu dessen Definition wir erst in der Folge (in § 7 und 8) kommen werden.

Erster Teil. Betrachtung des Grenzfalles Äther.

§ 2. Die Grundgleichungen für den Äther.

Die Lorentzsche Theorie führt die Gesetze der Elektrodynamik der ponderablen Körper durch atomistische Vorstellungen von der Elektrizität zurück auf einfachere Gesetze; an diese einfacheren Gesetze knüpfen wir hier ebenfalls an, indem wir fordern, daß sie den Grenzfall $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ der Gesetze für ponderable Körper bilden sollen. In diesem idealen Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ soll $\mathfrak{E} = \mathfrak{e}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$ sein und sollen an jedem Raum-Zeitpunkte x, y, z, t die Gleichungen bestehen:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \varrho \mathfrak{w},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{e} + \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{m} = 0.$$

Ich will nun schreiben x_1, x_2, x_3, x_4 für x, y, z, it ($i = \sqrt{-1}$), weiter

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \varrho_4$$

für

$$\varrho \mathfrak{w}_x,\ \varrho \mathfrak{w}_y,\ \varrho \mathfrak{w}_z,\ i\varrho$$

d. s. die Komponenten des Konvektionsstromes $\varrho\mathfrak{w}$ und die mit i multiplizierte Raumdichte der Elektrizität, ferner

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34}$$

für

$$\mathfrak{m}_x,\ \mathfrak{m}_y,\ \mathfrak{m}_z,\ -ie_x,\ -ie_y,\ -ie_z,$$

d. s. die Komponenten von $\mathfrak{m}$ bez. $-ie$ nach den Axen, endlich noch allgemein bei zwei der Reihe 1, 2, 3, 4 entnommenen Indizes h, k

$$f_{kh} = -f_{hk},$$

also

$$\begin{array}{lll} f_{32} = -f_{23}, & f_{13} = -f_{31}, & f_{21} = -f_{12}, \\ f_{41} = -f_{14}, & f_{42} = -f_{24}, & f_{43} = -f_{34} \end{array}$$

festsetzen.

Alsdann schreiben sich die drei in (I) zusammengefaßten Gleichungen und die mit i multiplizierte Gleichung (II):

$$\text{(A)}\qquad \begin{array}{rrrrl} & \dfrac{\partial f_{12}}{\partial x_2} & +\dfrac{\partial f_{13}}{\partial x_3} & +\dfrac{\partial f_{14}}{\partial x_4} & = \varrho_1, \\[2ex] \dfrac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & & +\dfrac{\partial f_{23}}{\partial x_3} & +\dfrac{\partial f_{24}}{\partial x_4} & = \varrho_2, \\[2ex] \dfrac{\partial f_{31}}{\partial x_1} & +\dfrac{\partial f_{32}}{\partial x_2} & & +\dfrac{\partial f_{34}}{\partial x_4} & = \varrho_3, \\[2ex] \dfrac{\partial f_{41}}{\partial x_1} & +\dfrac{\partial f_{42}}{\partial x_2} & +\dfrac{\partial f_{43}}{\partial x_3} & & = \varrho_4. \end{array}$$

Andererseits verwandeln sich die drei in (III) zusammengefaßten Gleichungen, mit $-i$ multipliziert, und die Gleichung (IV), mit -1 multipliziert, in

$$\text{(B)}\qquad \begin{array}{rrrrl} & \dfrac{\partial f_{34}}{\partial x_2} & +\dfrac{\partial f_{42}}{\partial x_3} & +\dfrac{\partial f_{23}}{\partial x_4} & = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f_{43}}{\partial x_1} & & +\dfrac{\partial f_{14}}{\partial x_3} & +\dfrac{\partial f_{31}}{\partial x_4} & = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f_{24}}{\partial x_1} & +\dfrac{\partial f_{41}}{\partial x_2} & & +\dfrac{\partial f_{12}}{\partial x_4} & = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f_{32}}{\partial x_1} & +\dfrac{\partial f_{13}}{\partial x_2} & +\dfrac{\partial f_{21}}{\partial x_3} & & = 0. \end{array}$$

Man bemerkt bei dieser Schreibweise sofort die vollkommene Symmetrie des ersten wie des zweiten dieser Glei-

chungssysteme in Bezug auf die Permutationen der Indizes 1, 2, 3, 4.

§ 3. Das Theorem der Relativität von Lorentz.

Die Schreibweise der Gleichungen (I) — (IV) in der Symbolik des Vektorkalküls dient bekanntermaßen dazu, eine Invarianz (oder besser Kovarianz) des Gleichungssystems (A) wie des Gleichungssystems (B) bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt in Evidenz zu setzen. Nehmen wir z. B. eine Drehung um die z-Axe um einen festen Winkel φ vor unter Festhaltung der Vektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$ im Raume, führen also anstatt x_1, x_2, x_3, x_4 neue Variabeln x_1', x_2', x_3', x_4' ein durch

$$x_1' = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,\quad x_2' = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,\quad x_3' = x_3,\quad x_4' = x_4,$$

dazu neue Größen $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ durch

$$\varrho_1' = \varrho_1 \cos\varphi + \varrho_2 \sin\varphi,\quad \varrho_2' = -\varrho_1 \sin\varphi + \varrho_2 \cos\varphi,\quad \varrho_3' = \varrho_3,\quad \varrho_4' = \varrho_4$$

neue Größen $f_{12}', \ldots f_{34}'$ durch

$$\begin{aligned} f_{23}' &= f_{23} \cos\varphi + f_{31} \sin\varphi,\quad f_{31}' = -f_{23} \sin\varphi + f_{31} \cos\varphi,\quad f_{12}' = f_{12}, \\ f_{14}' &= f_{14} \cos\varphi + f_{24} \sin\varphi,\quad f_{24}' = -f_{14} \sin\varphi + f_{24} \cos\varphi,\quad f_{34}' = f_{34}, \\ & \qquad\qquad f_{kh}' = -f_{hk}' \qquad (h,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, 4), \end{aligned}$$

so wird notwendig aus (A) das genau entsprechende System (A′), aus (B) das genau entsprechende System (B′) zwischen den neuen, mit Strichen versehenen Größen folgen.

Nun läßt sich auf Grund der Symmetrie des Systems (A) wie des Systems (B) in den Indizes 1, 2, 3, 4 sofort ohne jede Rechnung das von Lorentz gefundene Theorem der Relativität entnehmen.

Ich will unter $i\psi$ eine rein imaginäre Größe verstehen und die Substitution

$$\text{(1)}\qquad \begin{gathered} x_1' = x_1,\quad x_2' = x_2, \\ x_3' = x_3 \cos i\psi + x_4 \sin i\psi,\quad x_4' = -x_3 \sin i\psi + x_4 \cos i\psi \end{gathered}$$

betrachten. Mittelst

$$\text{(2)}\qquad -i \operatorname{tg} i\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = q,\quad \psi = \tfrac{1}{2} \log\operatorname{nat} \frac{1+q}{1-q}$$

spielt, kann leicht auf eine beliebige Richtung übertragen werden, indem sowohl das Axensystem der x, y, z wie das der x', y', z', jedes einer und der nämlichen Drehung in Bezug auf sich unterworfen wird. Wir kommen damit zu einem allgemeineren Satze.

Es sei $\mathfrak{v}$ mit den Komponenten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ ein gegebener Vektor mit einem solchen von Null verschiedenen Betrage $|\mathfrak{v}| = q$, der kleiner als 1 ist, von irgend einer Richtung. Wir verstehen allgemein unter $\bar{\mathfrak{v}}$ eine beliebige auf $\mathfrak{v}$ senkrechte Richtung und bezeichnen ferner die Komponente eines Vektors $\mathfrak{r}$ nach der Richtung $\mathfrak{v}$ oder einer Richtung $\bar{\mathfrak{v}}$ mit $\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}$ bez. $\mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}$.

Anstatt x, y, z, t sollen nun neue Größen x', y', z', t' in folgender Weise eingeführt werden. Wird kurz $\mathfrak{r}$ für den Vektor mit den Komponenten x, y, z im ersten, ferner $\mathfrak{r}'$ für den Vektor mit den Komponenten x', y', z' im zweiten Bezugsystem geschrieben, so soll sein für die Richtung von $\mathfrak{v}$:

$$\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt}{\sqrt{1-q^2}}, \tag{10}$$

für jede auf $\mathfrak{v}$ senkrechte Richtung $\bar{\mathfrak{v}}$:

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \tag{11}$$

und ferner:

$$t' = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + t}{\sqrt{1-q^2}}. \tag{12}$$

Die Bezeichnungen $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}$ und $\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}$ hier sind in dem Sinne zu verstehen, daß der Richtung $\mathfrak{v}$ und jeder zu $\mathfrak{v}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{v}}$ in x, y, z immer die Richtung mit den nämlichen Richtungskosinus in x', y', z' zugeordnet wird.

Eine Transformation, wie sie durch (10), (11), (12) mit der Bedingung $0 < q < 1$ dargestellt wird, will ich eine spezielle Lorentz-Transformation nennen, und soll $\mathfrak{v}$ der Vektor, die Richtung von $\mathfrak{v}$ die Axe, der Betrag von $\mathfrak{v}$ das Moment dieser speziellen Lorentz-Transformation heißen.

Werden weiter ϱ' und die Vektoren $\mathfrak{w}', \mathfrak{e}', \mathfrak{m}'$ in x', y', z' dadurch definiert, daß

$$\varrho' = \frac{\varrho(-q\mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} + 1)}{\sqrt{1-q^2}}, \tag{13}$$

$$(14) \qquad \varrho' \mathfrak{w}'_{\mathfrak{v}} = \frac{\varrho \mathfrak{w}_{\mathfrak{v}} - \varrho q}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \varrho' \mathfrak{w}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \varrho \mathfrak{w}_{\bar{\mathfrak{v}}},$$

ferner[1])

$$(15) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\bar{\mathfrak{v}}} &= \frac{(\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\bar{\mathfrak{v}}}}{\sqrt{1-q^2}}, \\ (\mathfrak{e}' + i\mathfrak{m}')_{\mathfrak{v}} &= (\mathfrak{e} + i\mathfrak{m} - i[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}])_{\mathfrak{v}} \end{aligned}$$

ist, so folgt der Satz, daß das Gleichungssystem (I), (II) und (III), (IV) jedesmal in das genau entsprechende System zwischen den mit Strichen versehenen Größen übergeht.

Die Auflösung der Gleichungen (10), (11), (12) führt auf:

$$(16) \qquad \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + qt'}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}, \qquad t = \frac{q\mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} + t'}{\sqrt{1-q^2}}. -$$

Wir schließen nun eine in der Folge sehr wichtige Bemerkung über die Beziehung der Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}'$ an. Es möge wieder die schon mehrfach gebrauchte Bezeichnung mit den Indizes 1, 2, 3, 4 herangezogen werden, sodaß wir x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 für x', y', z', it' und $\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3, \varrho'_4$ für $\varrho'\mathfrak{w}'_x, \varrho'\mathfrak{w}'_y, \varrho'\mathfrak{w}'_z, i\varrho'$ setzen. Wie eine Drehung um die z-Achse, so ist offenbar auch die Transformation (4) und allgemeiner die Transformation (10), (11), (12) eine solche lineare Transformation von der Determinante $+1$, wodurch

$$(17) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad \text{d. i.} \quad x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2, \quad \text{d. i.} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2$$

übergeht.

Es wird daher auf Grund der Ausdrücke (13), (14) auch

$$-(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 + \varrho_4^2) = \varrho^2(1 - \mathfrak{w}_x^2 - \mathfrak{w}_y^2 - \mathfrak{w}_z^2) = \varrho^2(1 - \mathfrak{w}^2)$$

in $\varrho'^2(1 - \mathfrak{w}'^2)$ übergehen, oder mit andern Worten

$$(18) \qquad \varrho\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2},$$

wobei die Quadratwurzel positiv genommen sei, eine Invariante bei Lorentz-Tronsformationen sein.

1) Die runden Klammern sollen nur die Ausdrücke zusammenfassen, welche der Index betrifft, und $[\mathfrak{w}, \mathfrak{e} + i\mathfrak{m}]$ soll das vektorielle Produkt von $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{e} + i\mathfrak{m}$ bed euten.

Indem wir $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ durch diese Größe dividieren, entstehen die 4 Werte

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\ w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

zwischen welchen die Beziehung

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1 \tag{19}$$

besteht. Offenbar sind diese 4 Werte eindeutig durch den Vektor $\mathfrak{w}$ bestimmt, und umgekehrt folgt aus irgend 4 Werten w_1, w_2, w_3, w_4, wobei w_1, w_2, w_3 reell, $-iw_4$ reell und positiv ist und die Bedingung (19) statthat, rückwärts gemäß diesen Gleichungen eindeutig ein Vektor $\mathfrak{w}$ von einem Betrage < 1.

Die Bedeutung von w_1, w_2, w_3, w_4 hier ist, daß sie die Verhältnisse von dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 zu

$$\sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)} = dt\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} \tag{20}$$

für die im Raum-Zeitpunkte x_1, x_2, x_3, x_4 befindliche Materie beim Übergang zu zeitlich benachbarten Zuständen derselben Stelle der Materie sind. Nun übertragen sich die Gleichungen (10), (11), (12) sofort auf die zusammengehörigen Differentiale dx, dy, dz, dt und dx', dy', dz', dt' und insbesondere wird daher für sie

$$-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) = -(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2)$$

sein. Nach Ausführung der Lorentz-Transformation ist im neuen Bezugsystem als Geschwindigkeit der Materie im nämlichen Raum-Zeitpunkte x', y', z', t' der Vektor $\mathfrak{w}'$ mit den Verhältnissen $\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}$ als Komponenten auszulegen.

Nunmehr ist ersichtlich, daß das Wertsystem

$$x_1 = w_1,\ x_2 = w_2,\ x_3 = w_3,\ x_4 = w_4$$

vermöge der Lorentz-Transformation (10), (11), (12) eben in dasjenige neue Wertsystem

$$x_1' = w_1',\ x_2' = w_2',\ x_3' = w_3',\ x_4' = w_4'$$

übergeht, das für die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}'$ nach der Transformation genau die Bedeutung hat wie das erstere Wertsystem für die Geschwindigkeit vor der Transformation.

Ist insbesondere der Vektor $\mathfrak{v}$ der speziellen Lorentz-Transformation gleich dem Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ der Materie im Raum-Zeitpunkte x_1, x_2, x_3, x_4, so folgt aus (10), (11), (12):

$$w'_1 = 0, \quad w'_2 = 0, \quad w'_3 = 0, \quad w'_4 = i.$$

Unter diesen Umständen erhält also der betreffende Raum-Zeitpunkt nach der Transformation die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}' = 0$, er wird, wie wir uns ausdrücken können, auf Ruhe transformiert. Wir können danach die Invariante $\varrho\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ passend als Ruh-Dichte der Elektrizität bezeichnen.

§ 5. Raum-Zeit-Vektoren I^ter und II^ter Art.

Indem wir das Hauptergebnis bezüglich der speziellen Lorentz-Transformationen mit der Tatsache zusammennehmen, daß das System (A) wie das System (B) jedenfalls bei einer Drehung des räumlichen Bezugsystems um den Nullpunkt kovariant ist, erhalten wir das allgemeine Theorem der Relativität. Um es leicht verständlich zu formulieren, dürfte es zweckmäßig sein, zuvor eine Reihe von abkürzenden Ausdrücken festzulegen, während ich andererseits daran festhalten will, komplexe Größen zu verwenden, um bestimmte Symmetrien in Evidenz zu setzen.

Eine lineare homogene Transformation

$$(21) \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 + \alpha_{14}x'_4, \\ x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 + \alpha_{24}x'_4, \\ x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 + \alpha_{34}x'_4, \\ x_4 &= \alpha_{41}x'_1 + \alpha_{42}x'_2 + \alpha_{43}x'_3 + \alpha_{44}x'_4 \end{aligned}$$

von der Determinante $+1$, in welcher alle Koeffizienten ohne einen Index 4 reell, dagegen $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ sowie $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ rein imaginär (ev. Null), endlich α_{44} wieder reell und speziell > 0 ist und durch welche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad \text{in} \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

übergeht, will ich allgemein eine Lorentz-Transformation nennen.

Wird

$$x'_1 = x', \quad x'_2 = y', \quad x'_3 = z', \quad x'_4 = it'$$

gesetzt, so entsteht daraus sofort eine homogene lineare Trans-

formation von x, y, z, t in x', y', z', t' mit lauter reellen Koeffizienten, wobei das Aggregat

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 \text{ in } -x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2$$

übergeht und einem jeden solchen Wertesystem x, y, z, t mit positivem t, wofür dieses Aggregrat > 0 ausfällt, stets auch ein positives t' entspricht; letzteres ist aus der Kontinuität des Aggregats in x, y, z, t leicht ersichtlich.

Die letzte Vertikalreihe des Koeffizientensystems von (21) hat die Bedingung

$$\alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1 \tag{22}$$

zu erfüllen.

Sind $\alpha_{14} = 0$, $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{34} = 0$, so ist $\alpha_{44} = 1$ und die Lorentz-Transformation reduziert sich auf eine bloße Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Sind $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$ nicht sämtlich Null und setzt man

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44} = \mathfrak{v}_x : \mathfrak{v}_y : \mathfrak{v}_z : i,$$

so folgt aus (22) der Betrag

$$q = \sqrt{\mathfrak{v}_x^2 + \mathfrak{v}_y^2 + \mathfrak{v}_z^2} < 1.$$

Andererseits kann man zu jedem Wertesystem $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}$, das in dieser Weise mit reellen $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ die Bedingung (22) erfüllt, die spezielle Lorentz-Transformation (16) mit $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}$ als letzter Vertikalreihe konstruieren und jede Lorentz-Transformation mit der nämlichen letzten Vertikalreihe der Koeffizienten kann alsdann zusammengesetzt werden aus dieser speziellen Lorentz-Transformation und einer sich daran anschließenden Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen bildet eine Gruppe.

Unter einem Raum-Zeit-Vektor I. Art soll verstanden werden ein beliebiges System von vier Größen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ mit der Vorschrift, bei jeder Lorentz-Transformation (21) es durch dasjenige System $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3', \varrho_4'$ zu ersetzen, das aus (21) für die Werte x_1', x_2', x_3', x_4' hervorgeht, wenn für x_1, x_2, x_3, x_4 die Werte $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ genommen werden.

Verwenden wir neben dem variabeln Raum-Zeit-Vektor I. Art x_1, x_2, x_3, x_4 einen zweiten solchen variabeln Raum-Zeit-Vektor I. Art u_1, u_2, u_3, u_4 und fassen die bilineare Verbindung

$$\begin{aligned}(23)\qquad & f_{23}(x_2 u_3 - x_3 u_2) + f_{31}(x_3 u_1 - x_1 u_3) + f_{12}(x_1 u_2 - x_2 u_1) \\ & + f_{14}(x_1 u_4 - x_4 u_1) + f_{24}(x_2 u_4 - x_4 u_2) + f_{34}(x_3 u_4 - x_4 u_3)\end{aligned}$$

mit sechs Koeffizienten $f_{23}, \ldots f_{34}$ auf. Wir bemerken, daß diese einerseits sich in vektorieller Schreibweise aus den 4 Vektoren

$$x_1, x_2, x_3; \quad u_1, u_2, u_3; \quad f_{23}, f_{31}, f_{12}; \quad f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

und den Konstanten x_4 und u_4 aufbauen läßt, andererseits symmetrisch in den Indizes 1, 2, 3, 4 ist. Indem wir x_1, x_2, x_3, x_4 und u_1, u_2, u_3, u_4 gleichzeitig gemäß der Lorentz-Transformation (21) substituieren, geht (23) in eine Verbindung

$$\begin{aligned}(24)\qquad & f'_{23}(x'_2 u'_3 - x'_3 u'_2) + f'_{31}(x'_3 u'_1 - x'_1 u'_3) + f'_{12}(x'_1 u'_2 - x'_2 u'_1) \\ & + f'_{14}(x'_1 u'_4 - x'_4 u'_1) + f'_{24}(x'_2 u'_4 - x'_4 u'_2) + f'_{34}(x'_3 u'_4 - x'_4 u'_3)\end{aligned}$$

mit gewissen allein von den 6 Größen $f_{23}, \ldots f_{34}$ und den 16 Koeffizienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{44}$ abhängenden 6 Koeffizienten $f'_{23}, \ldots f'_{34}$ über.

Einen Raum-Zeit-Vektor II. Art definieren wir als ein System von sechs Größen $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$ mit der Vorschrift, es bei jeder Lorentz-Transformation durch dasjenige neue System $f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}, f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}$ zu ersetzen, das dem eben erörterten Zusammenhange der Form (23) mit der Form (24) entspricht.

Das allgemeine Theorem der Relativität betreffend die Gleichungen (I)—(IV), die „Grundgleichungen für den Äther", spreche ich nunmehr folgendermaßen aus.

Werden x, y, z, it (Raumkoordinaten und Zeit $\times i$) einer beliebigen Lorentz-Transformation unterworfen und gleichzeitig $\varrho\mathfrak{w}_x, \varrho\mathfrak{w}_y, \varrho\mathfrak{w}_z, i\varrho$ (Konvektionsstrom und Ladungsdichte $\times i$) als Raum-Zeit-Vektor I. Art, ferner $\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z, -i\mathfrak{e}_x, -i\mathfrak{e}_y, -i\mathfrak{e}_z$ (magnetische Kraft und elektrische Erregung $\times -i$) als Raum-Zeit-Vektor II. Art transformiert, so geht das System der Gleichungen (I), (II) und das System der Gleichungen (III), (IV) je in das System der entsprechend lautenden Beziehungen zwischen den entsprechenden neu eingeführten Größen über.

Kürzer mag diese Tatsache auch mit den Worten angedeutet werden: Das System der Gleichungen (I), (II) wie das System der Gleichungen (III), (IV) ist kovariant bei jeder Lorentz-Transformation, wobei $\varrho\mathfrak{w}, i\varrho$ als Raum-Zeit-Vektor I. Art, $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ als Raum-Zeit-Vektor II. Art zu transformieren ist. Oder noch prägnanter:

$\varrho\mathfrak{w}, i\varrho$ ist ein Raum-Zeit-Vektor I. Art, $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ ist ein Raum-Zeit-Vektor II. Art. —



Ich füge noch einige Bemerkungen hier an, um die Vorstellung eines Raum-Zeit-Vektors II. Art zu erleichtern. Invarianten für einen solchen Vektor $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ bei der Gruppe der Lorentz-Transformationen sind offenbar

$$\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 + f_{14}^2 + f_{24}^2 + f_{34}^2, \tag{25}$$

$$\mathfrak{m}\mathfrak{e} = i(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34}) \tag{26}$$

Ein Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$, (wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{e}$ reelle Raum-Vektoren sind), mag singulär heißen, wenn das skalare Quadrat $(\mathfrak{m} - i\mathfrak{e})^2 = 0$, d. h. $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2 = 0$ und zugleich $(\mathfrak{m}\,\mathfrak{e}) = 0$ ist, d. h. die Vektoren $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{e}$ gleichen Betrag haben und zudem senkrecht aufeinander stehen. Wenn solches der Fall ist, bleiben diese zwei Eigenschaften für den Raum-Zeit-Vektor II. Art bei jeder Lorentz-Transformation erhalten.

Ist der Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ nicht singulär, so drehen wir zunächst das räumliche Koordinatensystem so, daß das Vektorprodukt $[\mathfrak{m}\,\mathfrak{e}]$ in die z-Axe fällt, daß $\mathfrak{m}_z = 0$, $\mathfrak{e}_z = 0$ ist. Dann ist $(\mathfrak{m}_x - i\mathfrak{e}_x)^2 + (\mathfrak{m}_y - i\mathfrak{e}_y)^2 \neq 0$, also $\dfrac{\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y}{\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x}$ verschieden von $\pm i$ und wir können daher ein komplexes Argument $\varphi + i\psi$ derart bestimmen, daß

$$\operatorname{tg}(\varphi + i\psi) = \frac{\mathfrak{e}_y + i\mathfrak{m}_y}{\mathfrak{e}_x + i\mathfrak{m}_x}$$

ist. Alsdann wird mit Rücksicht auf die Gleichung (9) durch die zu ψ gehörige Transformation (1) und eine nachherige Drehung um die z-Axe durch den Winkel φ eine Lorentz-Transformation bewirkt, nach der auch noch $\mathfrak{m}_y = 0$, $\mathfrak{e}_y = 0$ werden, also nunmehr $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{e}$ beide in die neue x-Linie fallen; dabei sind durch die Invarianten $\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{e}^2$ und $(\mathfrak{m}\,\mathfrak{e})$ die schließlichen Größen dieser Vektoren und ob sie von gleicher oder entgegengesetzter Richtung werden oder einer Null wird, von vornherein fixiert.

§ 6. Begriff der Zeit.

Durch die Lorentz-Transformationen werden gewisse Abänderungen des Zeitparameters zugelassen. Infolgedessen ist es nicht mehr statthaft, von der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an sich zu sprechen. Die Verwendung dieses Begriffs setzt vielmehr voraus, daß die Freiheit der 6 Parameter, die zur Angabe eines Bezugsystems für Raum und Zeit offen steht, bereits in gewisser Weise auf eine Freiheit von nur 3 Parametern eingeschränkt

ist. Nur weil wir gewohnt sind, diese Einschränkung stark approximativ eindeutig zu treffen, halten wir den Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse als an sich existierend[1]). In Wahrheit aber sollen folgende Umstände zutreffen.

Ein Bezugsystem x, y, z, t für Raum-Zeitpunkte (Ereignisse) sei irgendwie bekannt. Wird ein Raumpunkt $A(x_0, y_0, z_0)$ zur Zeit $t_0 = 0$ mit einem anderen Raumpunkte $P(x, y, z)$ zu einer anderen Zeit t verglichen und ist die Zeitdifferenz $t - t_0$ (es sei etwa $t > t_0$) kleiner als die Länge AP, d. i. die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von A nach P braucht, und ist q der Quotient $\frac{t-t_0}{AP} < 1$, so können wir durch die spezielle Lorentz-Transformation, die AP als Axe und q als Moment hat, einen neuen Zeitparameter t' einführen, der (s. Gleich. (12) in § 4) für beide Raum-Zeitpunkte A, t_0 und P, t den gleichen Wert $t' = 0$ erlangt; es lassen sich also diese zwei Ereignisse auch als gleichzeitig auffassen.

Nehmen wir weiter zu einer und derselben Zeit $t_0 = 0$ zwei verschiedene Raumpunkte A, B oder drei Raumpunkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, und vergleichen damit einen Raumpunkt P außerhalb der Geraden AB oder der Ebene ABC zu einer anderen Zeit t und ist die Zeitdifferenz $t - t_0$ (es sei etwa $t > t_0$) kleiner als die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von der Geraden AB oder der Ebene ABC nach P braucht, und q der Quotient aus der ersteren und der letzteren Zeit, so erscheinen nach Anwendung der speziellen Lorentz-Transformation, die als Axe das Lot auf AB, bez. ABC durch P und als Moment q hat, alle 3 (beziehungsweise 4) Ereignisse A, t_0; B, t_0; (C, t_0) und P, t als gleichzeitig.

Werden jedoch vier Raumpunkte, die nicht in einer Ebene liegen, zu einer und derselben Zeit t_0 aufgefaßt, so ist es nicht mehr möglich, durch eine Lorentz-Transformation eine Abänderung des Zeitparameters vorzunehmen, ohne daß der Charakter der Gleichzeitigkeit dieser vier Raum-Zeitpunkte verloren geht.

Dem Mathematiker, der an Betrachtungen über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten und andererseits an die Begriffsbildungen der sogenannten nicht-Euklidischen Geometrie gewohnt ist, kann es keine wesentliche Schwierigkeit bereiten, den Begriff der

1) Ungefähr wie Wesen gebannt an eine enge Umgebung eines Punktes auf einer Kugeloberfläche darauf verfallen könnten, die Kugel sei ein geometrisches Gebilde, an welchem ein Durchmesser an sich ausgezeichnet ist.

Zeit an die Verwendung der Lorentz-Transformationen zu adaptieren. Dem Bedürfnisse, sich das Wesen dieser Transformationen physikalisch näher zu bringen, kommt der in der Einleitung zitierte Aufsatz von A. Einstein entgegen.

Zweiter Teil. Die elektromagnetischen Vorgänge.

§ 7. Die Grundgleichungen für ruhende Körper.

Nach diesen vorbereitenden Ausführungen, die wir des etwas geringeren mathematischen Apparates wegen an dem idealen Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ entwickelten, wenden wir uns jetzt zu den Gesetzen für die elektromagnetischen Vorgänge in der Materie. Wir suchen diejenigen Beziehungen, die es — unter Voraussetzung geeigneter Grenzdaten — ermöglichen, an jedem Orte und zu jeder Zeit, also als Funktionen von x, y, z, t zu finden: die Vektoren der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$, der magnetischen Erregung $\mathfrak{M}$, der elektrischen Erregung $\mathfrak{e}$, der magnetischen Kraft $\mathfrak{m}$, die elektrische Raumdichte ϱ, den Vektor „elektrischer Strom $\mathfrak{s}$", (dessen Beziehung zum Leitungsstrom hernach durch die Art des Auftretens der Leitfähigkeit zu erkennen sein wird), endlich den Vektor $\mathfrak{w}$, die Geschwindigkeit der Materie.

Die fraglichen Beziehungen scheiden sich in zwei Klassen,

erstens diejenigen Gleichungen, die, wenn der Vektor $\mathfrak{w}$ als Funktion von x, y, z, t gegeben, also die Bewegung der Materie bekannt ist, zur Kenntnis aller anderen eben genannten Grössen als Funktionen von x, y, z, t hinführen, — diese erste Klasse speziell will ich die Grundgleichungen nennen, —

zweitens die Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte, die durch Heranziehen der Gesetze der Mechanik weiter Aufschluß über den Vektor $\mathfrak{w}$ als Funktion von x, y, z, t bringen.

Für den Fall ruhender Körper, d. i. wenn $\mathfrak{w}(x, y, z, t) = 0$ gegeben ist, kommen die Theorien von Maxwell (Heaviside, Hertz) und von Lorentz zu den nämlichen Grundgleichungen. Es sind dies

1) die Differentialgleichungen, die noch keine auf die Materie bezüglichen Konstanten enthalten:

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0;$$

2) weitere Beziehungen, die den Einfluß der vorhandenen Materie charakterisieren; sie werden in dem wichtigsten Falle, auf den wir uns hier beschränken, für isotrope Körper, angesetzt in der Gestalt

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{e} = \varepsilon\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = \mu\mathfrak{m}, \quad \mathfrak{s} = \sigma\mathfrak{E},$$

wobei ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit der Materie als Funktionen von x, y, z und t bekannt zu denken sind. $\mathfrak{s}$ ist hier als Leitungsstrom anzusprechen.

Ich lasse nun an diesen Gleichungen wieder durch eine veränderte Schreibweise eine noch versteckte Symmetrie hervortreten. Ich setze wie in den vorangeschickten Ausführungen

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = it$$

und schreibe

$$s_1, s_2, s_3, s_4$$

für

$$\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y, \mathfrak{s}_z, i\varrho,$$

ferner

$$f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

für

$$\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z, -i\mathfrak{e}_x, -i\mathfrak{e}_y, -i\mathfrak{e}_z$$

und noch

$$F_{23}, F_{31}, F_{12}, F_{14}, F_{24}, F_{34}$$

für

$$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z, -i\mathfrak{E}_x, i\mathfrak{E}_y, i\mathfrak{E}_z;$$

endlich soll für andere Paare von ungleichen, der Reihe 1, 2, 3, 4 entnommenen Indizes h, k stets

$$f_{kh} = -f_{hk}, \quad F_{kh} = -F_{hk}$$

gelten. (Die Buchstaben f, F sollen an das Wort Feld, s an Strom erinnern.)

Dann schreiben sich die Gleichungen (I), (II) um in

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned}
&\qquad\quad\;\; \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = s_1,\\
&\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} \qquad\quad + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} = s_2,\\
&\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} \qquad\quad + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} = s_3,\\
&\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} \qquad\quad = s_4,
\end{aligned}$$

und die Gleichungen (III), (IV) schreiben sich um in

$$
\text{(B)}\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}=0,\\
\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1}&+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_4}=0,\\
\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1}&+\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_4}=0,\\
\frac{\partial F_{32}}{\partial x_1}&+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{21}}{\partial x_3}=0.
\end{aligned}
$$

§ 8. Die Grundgleichungen für bewegte Körper.

Nunmehr wird es uns gelingen, die Grundgleichungen für beliebig bewegte Körper in eindeutiger Weise festzustellen, ausschließlich mittelst folgender drei Axiome:

Das erste Axiom soll sein:

Wenn eine einzelne Stelle der Materie in einem Momente ruht, also der Vektor $\mathfrak{w}$ für ein System x, y, z, t Null ist, — die Umgebung mag in irgend welcher Bewegung begriffen sein —, so sollen für den Raum-Zeitpunkt x, y, z, t zwischen ϱ, den Vektoren $\mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$, und deren Ableitungen nach x, y, z, t genau die Beziehungen (A), (B), (V) statthaben, die zu gelten hätten, falls alle Materie ruhte.

Das zweite Axiom soll sein:

Jede Geschwindigkeit der Materie ist < 1, kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume.

Das dritte Axiom soll sein:

Die Grundgleichungen sind von solcher Art, daß wenn x, y, z, it irgend einer Lorentz-Transformation unterworfen und dabei einerseits $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$, andererseits $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$ je als Raum-Zeit-Vektor II. Art, $\mathfrak{s}, i\varrho$ als Raum-Zeit-Vektor I. Art transformiert werden, die Gleichungen dadurch in die genau entsprechend lautenden Gleichungen zwischen den transformierten Größen übergehen.

Dieses dritte Axiom deute ich auch kurz mit den Worten an:

$\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$ sind je ein Raum-Zeit-Vektor II. Art, $\mathfrak{s}, i\varrho$ ein Raum-Zeit-Vektor I. Art,

und dieses Axiom nenne ich das Prinzip der Relativität.

Diese drei Axiome führen uns in der Tat von den vorhin genannten Grundgleichungen für ruhende Körper in eindeutiger Weise zu den Grundgleichungen für bewegte Körper.

Nämlich nach dem zweiten Axiom ist in jedem Raum-Zeitpunkte der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $|\mathfrak{w}| < 1$. Infolgedessen können wir dem Vektor $\mathfrak{w}$ stets umkehrbar eindeutig das Quadrupel von Größen

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}_2}}, \quad w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$$

zuordnen, zwischen denen die Beziehung

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1 \tag{27}$$

statthat. Aus den Ausführungen am Schlusse des § 4 ist ersichtlich, daß dieses Quadrupel sich bei Lorentz-Transformationen als Raum-Zeit-Vektor I. Art verhält, und wir wollen es den Raum-Zeit-Vektor Geschwindigkeit nennen.

Fassen wir nun eine bestimmte Stelle x, y, z der Materie zu einer bestimmten Zeit t auf. Ist in diesem Raum-Zeitpunkte $\mathfrak{w} = 0$, so haben wir für ihn nach dem ersten Axiom unmittelbar die Gleichungen (A), (B), (V) aus § 7. Ist in ihm $\mathfrak{w} \neq 0$, so existiert, weil $|\mathfrak{w}| < 1$ ist, nach (16) eine spezielle Lorentz-Transformation, deren Vektor $\mathfrak{v}$ gleich diesem Vektor $\mathfrak{w}(x, y, z, t)$ ist, und wir gehen allgemein zu einem neuen Bezugsystem x', y', z', t' gemäß dieser bestimmten Transformation über. Für den betrachteten Raum-Zeitpunkt entstehen dabei, wie wir in § 4 sahen, die neuen Werte

$$w_1' = 0, \quad w_2' = 0, \quad w_3' = 0, \quad w_4' = i, \tag{28}$$

und also der neue Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}' = 0$, der Raum-Zeitpunkt wird, wie wir uns dort ausdrückten, auf Ruhe transformiert. Nun sollen nach dem dritten Axiom aus den Grundgleichungen für den Raum-Zeitpunkt x, y, z, t dabei die Grundgleichungen für das entsprechende System x', y', z', t', geschrieben in den transformierten Größen $\mathfrak{w}', \varrho', \mathfrak{s}', \mathfrak{e}', \mathfrak{m}', \mathfrak{E}', \mathfrak{M}'$ und deren Differentialquotienten nach x', y', z', t' hervorgehen. Diese letzteren Gleichungen aber müssen, nach dem ersten Axiom, weil jetzt $\mathfrak{w}' = 0$ ist, genau sein:

1) diejenigen Differentialgleichungen (A'), (B'), die aus (A) und (B) einfach dadurch hervorgehen, daß alle Buchstaben dort mit einem oberen Strich versehen werden,

2) die Gleichungen

(V') $\mathfrak{e}' = \varepsilon\mathfrak{E}', \quad \mathfrak{M}' = \mu\mathfrak{m}', \quad \mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}',$

wobei ε, μ, σ Dielektrizitätskonstante, magnetische Permeabilität, Leitfähigkeit für das System x', y', z', t', d. i. also im betrachteten Raum-Zeitpunkte x, y, z, t der Materie sind.

Jetzt gehen wir durch die reziproke Lorentz-Transformation rückwärts zu den ursprünglichen Variabeln x, y, z, t und den Größen $\mathfrak{w}$, ϱ, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ und die Gleichungen, die wir dann aus den eben genannten erhalten, werden die von uns gesuchten allgemeinen Grundgleichungen für bewegte Körper sein.

Nun ist aus den Ausführungen in § 4 und § 5 zu ersehen, daß sowohl das Gleichungssystem (A) für sich wie das Gleichungssystem (B) für sich kovariant bei den Lorentz-Transformationen ist; d. h. die Gleichungen, die wir von (A'), (B'), rückwärts erlangen, müssen genau gleichlauten mit den Gleichungen (A), (B), wie wir sie für ruhende Körper annahmen. Wir haben also als erstes Ergebnis:

Von den Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper lauten die Differentialgleichungen, geschrieben in ϱ und den Vektoren $\mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$ genau wie für ruhende Körper. Die Geschwindigkeit der Materie tritt in diesen Gleichungen noch nicht auf. In vektorieller Schreibweise sind diese Gleichungen also wieder

(I) $$\operatorname{curl} \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

(II) $$\operatorname{div} \mathfrak{e} = \varrho,$$

(III) $$\operatorname{curl} \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

(IV) $$\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0.$$

Die Geschwindigkeit der Materie wird ausschließlich auf die Zusatzbedingungen verwiesen, welche den Einfluß der Materie auf Grund ihrer speziellen Konstanten ε, μ, σ charakterisieren. Transformieren wir jetzt diese Zusatzbedingungen (V') zurück auf die ursprünglichen Koordinaten x, y, z und die ursprüngliche Zeit t.

Nach den Formeln (15) in § 4 ist für die Richtung des Vektors $\mathfrak{w}$ die Komponente von $\mathfrak{e}'$ dieselbe wie von $\mathfrak{e} + [\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$, die von $\mathfrak{m}'$ dieselbe wie von $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, für jede dazu senkrechte Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$ aber ist die Komponente von $\mathfrak{e}'$ bez. $\mathfrak{m}'$

gleich der entsprechenden Komponente von $\mathfrak{e} + [\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$ bez. von $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, jedesmal multipliziert noch mit $\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$. Andererseits werden $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{M}'$ hier zu $\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ und $\mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ in den ganz analogen Beziehungen stehen wie $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{m}'$ zu $\mathfrak{e}+[\mathfrak{w}\mathfrak{m}]$ und $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$. So führt die Relation $\mathfrak{e}' = \varepsilon\mathfrak{E}'$, indem man bei den Vektoren zuerst die Komponenten nach der Richtung $\mathfrak{w}$, dann diejenigen nach zwei zu $\mathfrak{w}$ und auf einander senkrechten Richtungen $\bar{\mathfrak{w}}$ behandelt und die in letzteren Fällen entstehenden Gleichungen mit $\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}$ multipliziert, zu

$$\text{(C)} \qquad \mathfrak{e} + [\mathfrak{w}\mathfrak{m}] = \varepsilon(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]).$$

Die Relation $\mathfrak{M}' = \mu\mathfrak{m}'$ wird analog auf

$$\text{(D)} \qquad \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mu(\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}])$$

hinauslaufen.

Weiter folgt nach den Transformationsgleichungen (12), (10), (11) in § 4, indem dort $q, \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}}, \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}, t, \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}}, \mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}}, t'$ durch $|\mathfrak{w}|, \mathfrak{s}_{\mathfrak{w}}, \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}}, \varrho, \mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}}, \mathfrak{s}'_{\bar{\mathfrak{w}}}, \varrho'$ zu ersetzen sind,

$$\varrho' = \frac{-|\mathfrak{w}|\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} + \varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad \mathfrak{s}'_{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \quad \mathfrak{s}'_{\bar{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}},$$

sodaß aus $\mathfrak{s}' = \sigma\mathfrak{E}'$ nunmehr

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])_{\mathfrak{w}}, \\[2ex] \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}} = \dfrac{\sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}])_{\bar{\mathfrak{w}}}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} \end{cases}$$

hervorgeht. Nach der Art, wie hier die Leitfähigkeit σ eingeht, wird es angemessen sein, den Vektor $\mathfrak{s} - \varrho\mathfrak{w}$ mit den Komponenten $\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - \varrho|\mathfrak{w}|$ nach der Richtung $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}}$ nach den auf $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtungen $\bar{\mathfrak{w}}$, der für $\sigma = 0$ verschwindet, als Leitungsstrom zu bezeichnen.

Wir bemerken, daß für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ die Gleichungen $\mathfrak{e}' = \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{M}'$ durch die reziproke Lorentz-Transformation, die hier die spezielle mit $-\mathfrak{w}$ als Vektor wird, gemäß (15) sofort zu $\mathfrak{e} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$ führen und daß für $\sigma = 0$ die Gleichung $\mathfrak{s}' = 0$ zu $\mathfrak{s} = \varrho\mathfrak{w}$ führt, sodaß in der Tat als Grenzfall der hier erhaltenen Gleichungen für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ sich die in § 2 betrachteten „Grundgleichungen für den Äther" ergeben.

§ 9. Die Grundgleichungen in der Theorie von Lorentz.

Sehen wir nun zu, inwieweit die Grundgleichungen, die Lorentz annimmt, dem Relativitätspostulate, das soll heißen dem in § 8 formulierten Relativitätsprinzipe entsprechen. In dem Artikel „Elektronentheorie“ (Encykl. der math. Wiss., Bd. V 2, Art. 14) hat Lorentz für beliebige, auch magnetisierte Körper zunächst die Differentialgleichungen (s. dort S. 209 unter Berücksichtigung von Gl. XXX′ daselbst und von Formel (14) auf S. 78 desselben Heftes):

$$\text{(III}\ddot{\text{a}}\text{)}\qquad \operatorname{curl}(\mathfrak{H}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) = \mathfrak{J}+\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}+\mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{D}-\operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{D}],$$

$$\text{(I}''\text{)}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(IV}''\text{)}\qquad \operatorname{curl}\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(V}''\text{)}\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Dann setzt Lorentz für bewegte nicht magnetisierte Körper (S. 223, Z. 3) $\mu = 1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ und nimmt dazu das Eingehen der Dielektrizitätskonstante ε und der Leitfähigkeit σ gemäß

$$\text{(Gl. XXXIV}''' \text{, S, 227)}\qquad \mathfrak{D}-\mathfrak{E} = (\varepsilon-1)(\mathfrak{E}+[\mathfrak{w}\mathfrak{B}]),$$

$$\text{(Gl. XXXIII}''\text{, S. 223)}\qquad \mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{E}+[\mathfrak{w}\mathfrak{B}])$$

an. Die Lorentzschen Zeichen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ sind hier durch $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}$ ersetzt, während $\mathfrak{J}$ bei Lorentz als Leitungsstrom bezeichnet wird.

Die drei letzten der zitierten Differentialgleichungen nun decken sich sofort mit den Gleichungen (II), (III), (IV) hier, die erste Gleichung aber würde, indem wir $\mathfrak{J}$ mit dem für $\sigma = 0$ verschwindenden Strome $\mathfrak{s}-\mathfrak{w}\varrho$ identifizieren, in

$$\text{(29)}\qquad \operatorname{curl}(\mathfrak{H}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) = \mathfrak{s}+\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}-\operatorname{curl}[\mathfrak{w}\mathfrak{D}]$$

übergehen und verschieden von (I) hier ausfallen. Danach entsprechen die allgemeinen Differentialgleichungen von Lorentz für beliebig magnetisierte Körper nicht dem Relativitätsprinzipe.

Andererseits würde die dem Relativitätsprinzipe entsprechende Form für die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins aus (D) in § 8 mit $\mu = 1$ nicht wie bei Lorentz als $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, sondern als

$$\text{(30)}\qquad \mathfrak{B}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{H}-[\mathfrak{w}\mathfrak{D}]\ \text{(hier}\ \mathfrak{M}-[\mathfrak{w}\mathfrak{E}] = \mathfrak{m}-[\mathfrak{w}\mathfrak{e}])$$

anzunehmen sein. Nun geht aber die zuletzt hingeschriebene Differentialgleichung (29) durch $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ in dieselbe Gleichung (abgesehen von der Verschiedenheit der Zeichen) über, in welche (I) hier sich durch $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}] = \mathfrak{M} - [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ verwandeln würde. So kommt es durch eine Kompensation zweier Widersprüche gegen das Relativitätsprinzip zu Stande, daß für nicht magnetisierte bewegte Körper die Differentialgleichungen von Lorentz sich zuletzt dem Relativitätsprinzipe doch anpassen.

Macht man weiter für nicht magnetisierte Körper von (30) hier Gebrauch und setzt demgemäß $\mathfrak{H} = \mathfrak{B} + [\mathfrak{w}, \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]$, so würde zufolge (C) in § 8

$$(\varepsilon - 1)\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}]) = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}[\mathfrak{w}, \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]]$$

anzunehmen sein, d. i. für die Richtung von $\mathfrak{w}$:

$$(\varepsilon - 1)\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\mathfrak{w}} = (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\mathfrak{w}},$$

und für jede zu $\mathfrak{w}$ senkrechte Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$:

$$(\varepsilon - 1)\,(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])_{\bar{\mathfrak{w}}} = (1 - \mathfrak{w}^2)\,(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\bar{\mathfrak{w}}},$$

d. i. mit der oben genannten Lorentzschen Annahme nur in Übereinstimmung bis auf Fehler von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ gegen 1.

Auch nur mit dem gleichen Grade der Annäherung entspricht der oben genannte Lorentzsche Ansatz für $\mathfrak{J}$ den durch das Relativitätsprinzip geforderten Beziehungen (vgl. (E) in § 8), daß die Komponenten $\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}$ bez. $\mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{w}}}$ gleich den entsprechenden Komponenten von $\sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{B}])$, multipliziert in $\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}$ bez. in $\frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}}$ seien.

§ 10. Die Grundgleichungen nach E. Cohn.

E. Cohn[1]) nimmt folgende Grundgleichungen an:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \operatorname{curl}\,(M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]) &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{E} + \mathfrak{J}, \\ -\operatorname{curl}\,(E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{M}, \end{aligned}$$

$$(32)\qquad \mathfrak{J} = \sigma E,\quad \mathfrak{E} = \varepsilon E - [\mathfrak{w}M],\quad \mathfrak{M} = \mu M + [\mathfrak{w}E],$$

wobei E, M als elektrische und magnetische Feldintensität (Kraft), $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ als elektrische und magnetische Polarisation (Erregung)

1) Gött. Nachr. 1901, S. 74 (auch in Ann. d. Phys. 7 (4), 1902, p. 29).

aufgefaßt werden. Die Gleichungen lassen noch das Vorhandensein von wahrem Magnetismus zu; wollen wir davon absehen, so ist $\operatorname{div} \mathfrak{M} = 0$ zu setzen.

Ein Einwand gegen diese Gleichungen ist, daß nach ihnen für $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ nicht die Vektoren Kraft und Erregung zusammenfallen. Fassen wir jedoch in den Gleichungen nicht E und M, sondern $E - [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$ und $M + [\mathfrak{w}\mathfrak{E}]$ als elektrische und magnetische Kraft auf und substituieren im Hinblick hierauf für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, E, M, $\operatorname{div} \mathfrak{E}$ die Zeichen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]$, $\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]$, ϱ, so gehen zunächst die Differentialgleichungen in unsere Gleichungen über und zugleich verwandeln die Bedingungen (32) sich in

$$\mathfrak{J} = \sigma(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]),$$

$$\mathfrak{e} + [\mathfrak{w}, \mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]] = \varepsilon(\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]),$$

$$\mathfrak{M} - [\mathfrak{w}, \mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]] = \mu(\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]);$$

damit würden in der Tat diese Gleichungen von Cohn bis auf Fehler von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ gegen 1 genau die durch das Relativitätsprinzip geforderten werden.

Erwähnt sei noch, daß die von Hertz angenommenen Gleichungen (in den Bezeichnungen von Cohn) lauten wie (31) mit den anderen Zusatzbedingungen

$$\mathfrak{E} = \varepsilon E, \quad \mathfrak{M} = \mu M, \quad \mathfrak{J} = \sigma E; \tag{33}$$

und dieses Gleichungssystem würde auch nicht bei irgend welcher veränderten Bezugnahme der Zeichen auf beobachtbare Größen sich dem Relativitätsprinzipe bis auf Fehler von der Ordnung $\mathfrak{w}^2$ gegen 1 anpassen.

§ 11. Typische Darstellung der Grundgleichungen.

Bei der Aufstellung der Grundgleichungen leitete uns der Gedanke, für sie eine Kovarianz bezüglich der Gruppe der Lorentz-Transformationen zu erzielen. Jetzt haben wir noch die ponderomotorischen Wirkungen und die Umsetzung der Energie im elektromagnetischen Felde zu behandeln, und da kann es von vorn herein nicht zweifelhaft sein, daß die Erledigung dieser Fragen jedenfalls zusammenhängen wird mit den einfachsten, an die Grundgleichungen anknüpfenden Bildungen, die wieder Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen zeigen. Um auf diese Bildungen hingewiesen zu werden, will ich vor Allem die Grundgleichungen jetzt in eine typische Form bringen, die ihre Kovarianz bei der Lorentzschen Gruppe in Evidenz

setzt. Dabei bediene ich mich einer Rechnungsmethode, die ein abgekürztes Operieren mit den Raum-Zeit-Vektoren I. und II. Art bezweckt, und deren Regeln und Bezeichnungen, soweit sie für uns nützlich sein werden, ich hier zuvörderst zusammenstelle.

1°. Ein System von Größen

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}, & \ldots & a_{pq} \end{vmatrix},$$

angeordnet in p-Horizontal-, q-Vertikalreihen heißt eine $p \times q$-reihige Matrix[1]) und werde mit einem einzigen Zeichen, etwa hier A, bezeichnet.

Werden alle Größen a_{hk} mit dem nämlichen Faktor c multipliziert, so soll die entstehende Matrix der Größen ca_{hk} mit cA bezeichnet werden.

Werden die Rollen der Horizontal- und Vertikalreihen in A vertauscht, so erhält man eine $q \times p$-reihige Matrix, welche die transponierte von A heißt und mit $\bar{A}$ bezeichnet werden soll:

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1q}, & \ldots & a_{pq} \end{vmatrix}.$$

Hat man eine zweite Matrix mit gleichen Anzahlen p und q, wie A,

$$B = \begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1}, & \ldots & b_{pq} \end{vmatrix},$$

so soll $A+B$ die ebenfalls $p \times q$-reihige Matrix aus den entsprechenden Binomen $a_{hk} + b_{hk}$ bedeuten.

2°. Hat man zwei Matrizen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & \ldots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}, & \ldots & a_{pq} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1}. & \ldots & b_{qr} \end{vmatrix},$$

wobei die Anzahl der Horizontalreihen der zweiten gleich der Anzahl der Vertikalreihen der ersten

1) Man könnte auch daran denken, statt des Cayleyschen Matrizenkalküls den Hamiltonschen Quaternionenkalkül heranzuziehen, doch erscheint mir der letztere für unsere Zwecke als zu eng und schwerfällig.

ist, so wird unter AB, dem Produkte aus A und B, die Matrix

$$C = \begin{vmatrix} c_{11}, \dots c_{1r} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ c_{p1}, \dots c_{pr} \end{vmatrix}$$

verstanden, deren Elemente durch Kombination der Horizontalreihen von A und der Vertikalreihen von B nach der Regel

$$c_{hk} = a_{h1} b_{1k} + a_{h2} b_{2k} + \cdots + a_{hq} b_{qk} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots p \\ k = 1, 2, \dots r \end{pmatrix}$$

gebildet sind. Für solche Produkte gilt das assoziative Gesetz $(AB)S = A(BS)$; hierbei ist unter S eine dritte Matrix gedacht mit soviel Horizontalreihen, als B (und damit auch AB) Vertikalreihen hat.

Für die transponierte Matrix zu $C = AB$ gilt $\bar{C} = \bar{B}\bar{A}$.

3°. Es werden hier nur Matrizen in Betracht kommen mit höchstens 4 Horizontalreihen und höchstens 4 Vertikalreihen.

Als Einheitsmatrix (und in Gleichungen für Matrizen kurzweg mit 1) werde die 4×4-reihige Matrix der folgenden Elemente

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & e_{13}, & e_{14} \\ e_{21}, & e_{22}, & e_{23}, & e_{24} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33}, & e_{34} \\ e_{41}, & e_{42}, & e_{43}, & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Für ein Vielfaches $c.1$ der Einheitsmatrix (in dem unter 1° festgesetzten Sinne einer Matrix cA) soll dann in Gleichungen für Matrizen kurzweg c stehen.

Für eine 4×4-reihige Matrix A soll Det A die Determinante aus den 4×4 Elementen der Matrix bedeuten. Ist dann Det $A \neq 0$, so gehört zu A eine bestimmte reziproke Matrix, mit A^{-1} bezeichnet, sodaß $A^{-1} A = 1$ wird. —

Eine Matrix

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher die Elemente die Relationen $f_{kh} = -f_{hk}$ erfüllen, heißt eine **alternierende** Matrix. Diese Relationen besagen, daß die transponierte Matrix $\bar{f} = -f$ ist. Alsdann werde mit f^* und als die **duale** Matrix von f die ebenfalls alternierende Matrix

$$(35) \qquad f^* = \begin{vmatrix} 0, & f_{34}, & f_{42}, & f_{23} \\ f_{43}, & 0, & f_{14}, & f_{31} \\ f_{24}, & f_{41}, & 0, & f_{12} \\ f_{32}, & f_{13}, & f_{21}, & 0 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Dabei wird

$$(36) \qquad f^*f = f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34},$$

das soll nun heißen eine 4×4-reihige Matrix, in der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten Null sind und alle Elemente in dieser Diagonale unter einander übereinstimmen und gleich der hier rechts genannten Verbindung aus den Koeffizienten von f sind. Die Determinante von f erweist sich dann als das Quadrat dieser Verbindung und wir wollen das Zeichen $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$ eindeutig als die Abkürzung

$$(37) \qquad \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f = f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34}$$

erklären.

4°. Eine lineare Transformation

$$(38) \qquad x_h = \alpha_{h1}x_1' + \alpha_{h2}x_2' + \alpha_{h3}x_3' + \alpha_{h4}x_4' \qquad (h = 1, 2, 3, 4)$$

werde auch einfach durch die 4×4-reihige Matrix der Koeffizienten

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \alpha_{14} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & \alpha_{24} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & \alpha_{34} \\ \alpha_{41}, & \alpha_{42}, & \alpha_{43}, & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

als Transformation A, bezeichnet. Durch die Transformation A geht der Ausdruck

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

in die quadratische Form

$$\Sigma a_{hk} x_h' x_k' \qquad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

über, wobei

$$a_{hk} = \alpha_{1h}\alpha_{1k} + \alpha_{2h}\alpha_{2k} + \alpha_{3h}\alpha_{3k} + \alpha_{4h}\alpha_{4k}$$

wird, d. h. die 4×4-reihige (symmetrische) Matrix der Koeffizienten a_{hk} dieser Form wird das Produkt $\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A}$ der transponierten Matrix von A in die Matrix A. Soll also durch die Transformation der neue Ausdruck

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

hervorgehen, so muß

$$(39) \qquad \bar{\mathsf{A}}\mathsf{A} = 1$$

die Matrix 1 werden. Dieser Relation hat demnach A zu entsprechen, wenn die Transformation (38) eine Lorentz-Transformation sein soll. Für die Determinante von A folgt aus (39): $(\mathrm{Det}\,\mathsf{A})^2 = 1$, $\mathrm{Det}\,\mathsf{A} = \pm 1$. Die Bedingung (39) kommt zugleich auf

$$(40) \qquad \mathsf{A}^{-1} = \bar{\mathsf{A}}$$

hinaus, d. h. die reziproke Matrix von A muß sich mit der transponierten von A decken.

Fär A als Lorentz-Transformation haben wir noch weiter die Bestimmungen getroffen, daß $\mathrm{Det}\,\mathsf{A} = +1$ sei, daß jede der Größen $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$ rein imaginär (bez. Null), die anderen Koeffizienten in A reell seien und endlich noch $\alpha_{44} > 0$ sei.

5°. Ein Raum-Zeit-Vektor I. Art s_1, s_2, s_3, s_4 soll durch die 1×4-reihige Matrix seiner 4 Komponenten:

$$(41) \qquad s = | \, s_1, \; s_2, \; s_3, \; s_4 \, |$$

repräsentiert werden und ist bei einer Lorentz-Transformation A durch $s\mathsf{A}$ zu ersetzen.

Ein Raum-Zeit-Vektor II. Art mit den Komponenten $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$ soll durch die alternierende Matrix

$$(42) \qquad f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix}$$

repräsentiert werden und ist (s. die in § 5 (23) und (24) festgesetzte Regel) bei einer Lorentz-Transformation A durch $\bar{\mathsf{A}}f\mathsf{A} = \mathsf{A}^{-1}f\mathsf{A}$ zu ersetzen. Dabei gilt in Bezug auf den Ausdruck

(37) die Identität $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}(\bar{\mathsf{A}} f \mathsf{A}) = \mathrm{Det}\,\mathsf{A}\ \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$. Es wird danach $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$ eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen (s. Gleich. (26) in § 5).

Für die duale Matrix f^* folgt dann mit Rücksicht auf (36):

$$(\mathsf{A}^{-1} f^* \mathsf{A})(\mathsf{A}^{-1} f \mathsf{A}) = \mathsf{A}^{-1} f^* f \mathsf{A} = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f.\ \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f,$$

woraus zu ersehen ist, daß mit dem Raum-Zeit-Vektor II. Art f zusammen auch die zugehörige duale Matrix f^* sich wie ein Raum-Zeit-Vektor II. Art abändert, und es heiße deshalb f^* mit den Komponenten $f_{14}, f_{24}, f_{34}, f_{23}, f_{31}, f_{12}$ der duale Raum-Zeit-Vektor von f.

6°. Sind w und s zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art, so wird unter $w\bar{s}$ (wie auch unter $s\bar{w}$) die Verbindung

$$w_1 s_1 + w_2 s_2 + w_3 s_3 + w_4 s_4 \tag{43}$$

aus den bezüglichen Komponenten zu verstehen sein. Bei einer Lorentz-Transformation A ist wegen $(w\mathsf{A})(\bar{\mathsf{A}}\bar{s}) = w\bar{s}$ diese Verbindung invariant. — Ist $w\bar{s} = 0$, so sollen w und s normal zu einander heißen.

Zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art w, s geben ferner zur Bildung der 2×4-reihigen Matrix

$$\left|\begin{matrix} w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{matrix}\right|$$

Anlaß. Es zeigt sich dann sofort, daß das System der sechs Größen

$$w_2 s_3 - w_3 s_2,\ w_3 s_1 - w_1 s_3,\ w_1 s_2 - w_2 s_1,\ w_1 s_4 - w_4 s_1,\ w_2 s_4 - w_4 s_2,\ w_3 s_4 - w_4 s_3 \tag{44}$$

sich bei den Lorentz-Transformationen als Raum-Zeit-Vektor II. Art verhält. Der Vektor II. Art mit diesen Komponenten (44) werde mit $[w, s]$ bezeichnet. Man erschließt leicht $\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}[w, s] = 0$. Der duale Vektor von $[w, s]$ soll $[w, s]^*$ geschrieben werden.

Ist w ein Raum-Zeit-Vektor I. Art, f ein Raum-Zeit-Vektor II. Art, so bedeutet wf zunächst jedenfalls eine 1×4-reihige Matrix. Bei einer Lorentz-Transformation A geht w in $w' = w\mathsf{A}$, f in $f' = \mathsf{A}^{-1} f \mathsf{A}$ über; dabei wird $w'f' = w\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{-1} f \mathsf{A} = (wf)\mathsf{A}$, d. h. wf transformiert sich wieder als ein Raum-Zeit-Vektor I. Art.

Man verifiziert, wenn w ein Vektor I., f ein Vektor II. Art ist, leicht die wichtige Identität

$$[w,\ wf] + [w,\ wf^*]^* = (w\bar{w}) f. \tag{45}$$

Die Summe der zwei Raum-Zeit-Vektoren II. Art links ist im Sinne der Summe zweier alternierenden Matrizen zu verstehen.

Nämlich für $w_1 = 0,\ w_2 = 0,\ w_3 = 0,\ w_4 = i$ wird

$$wf = |if_{41},\ if_{42},\ if_{43},\ 0|; \qquad wf^* = |if_{32},\ if_{13},\ if_{21},\ 0|;$$
$$[w, wf] = 0, 0, 0,\ f_{41}, f_{42}, f_{43};\ [w, wf^*] = 0, 0, 0,\ f_{32}, f_{13}, f_{21}$$

und die Bemerkung, daß in diesem speziellen Falle die Relation (45) zutrifft, genügt bereits, um derselben allgemein sicher zu sein, da diese Relation kovarianten Charakter für die Lorentz-Gruppe hat und zudem in $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ homogen ist.

Nach diesen Vorbereitungen beschäftigen wir uns zunächst mit den Gleichungen (C), (D), (E), durch welche die Konstanten $\varepsilon,\ \mu,\ \sigma$ eingeführt werden.

Statt des Raumvektors $\mathfrak{w}$, Geschwindigkeit der Materie, führen wir, wie schon in § 8, den Raum-Zeit-Vektor I. Art w mit den 4 Komponenten

$$w_1 = \frac{\mathfrak{w}_x}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad w_2 = \frac{\mathfrak{w}_y}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad w_3 = \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},\quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$$

ein; dabei gilt

$$(46) \qquad w\bar{w} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

und $-iw_4 > 0$.

Unter F und f wollen wir jetzt wieder die in den Grundgleichungen auftretenden Raum-Zeit-Vektoren II. Art $\mathfrak{M}$, $-i\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{m}$, $-i\mathfrak{e}$ verstehen.

In $\Phi = -wF$ haben wir wieder einen Raum-Zeit-Vektor I. Art; seine Komponenten werden sein

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \qquad\qquad w_2F_{12} + w_3F_{13} + w_4F_{14},\\
\Phi_2 &= w_1F_{21} \qquad\qquad + w_3F_{23} + w_4F_{24},\\
\Phi_3 &= w_1F_{31} + w_2F_{32} \qquad\qquad + w_4F_{34},\\
\Phi_4 &= w_1F_{41} + w_2F_{42} + w_3F_{43} \qquad\qquad .
\end{aligned}$$

Die drei ersten Größen $\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3$ sind bez. die x-, y-, z-Komponente des Raumvektors

$$(47) \qquad \frac{\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}},$$

und ferner ist

$$\Phi_4 = \frac{i(\mathfrak{w}\mathfrak{E})}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}. \tag{48}$$

Da die Matrix F eine alternierende ist, gilt offenbar

$$w\bar{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0, \tag{49}$$

der Vektor Φ ist also normal zu w; wir können diese Relation auch schreiben:

$$\Phi_4 = i(\mathfrak{w}_x\Phi_1 + \mathfrak{w}_y\Phi_2 + \mathfrak{w}_z\Phi_3). \tag{50}$$

Den Raum-Zeit-Vektor I. Art Φ will ich **elektrische Ruh-Kraft** nennen.

Analoge Beziehungen wie zwischen $-wF$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{w}$ stellen sich zwischen $-wf$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{w}$ heraus und insbesondere wird auch $-wf$ normal zu w sein. Es kann nunmehr die Relation (C) durch

$$\{C\} \qquad wf = \varepsilon wF$$

ersetzt werden, eine Formel, die zwar 4 Gleichungen für die bezüglichen Komponenten liefert, jedoch so, daß die vierte im Hinblick auf (50) eine Folge der drei ersten ist.

Wir bilden ferner den Raum-Zeit-Vektor I. Art $\Psi = iwf^*$, dessen Komponenten sind:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= -i(\qquad\quad w_2f_{34} + w_3f_{42} + w_4f_{23}),\\
\Psi_2 &= -i(w_1f_{43} \qquad\quad + w_3f_{14} + w_4f_{31}),\\
\Psi_3 &= -i(w_1f_{24} + w_2f_{41} \qquad\quad + w_4f_{12}),\\
\Psi_4 &= -i(w_1f_{32} + w_2f_{13} + w_3f_{21} \qquad\quad).
\end{aligned}$$

Davon sind die drei ersteren Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 bez. die x-, y-, z-Komponente des Raumvektors

$$\frac{\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}, \tag{51}$$

und weiter ist

$$\Psi_4 = \frac{i(\mathfrak{w}\mathfrak{m})}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}; \tag{52}$$

zwischen ihnen besteht die Beziehung

$$w\bar{\Psi} = w_1\Psi_1 + w_2\Psi_2 + w_3\Psi_3 + w_4\Psi_4 = 0, \tag{53}$$

die wir auch

(54) $$\Psi_4 = i(\mathfrak{w}_x\Psi_1 + \mathfrak{w}_y\Psi_2 + \mathfrak{w}_z\Psi_3)$$

schreiben können; der Vektor Ψ ist also wieder normal zu w. Den Raum-Zeit-Vektor I. Art Ψ will ich **magnetische Ruh-Kraft** nennen.

Analoge Beziehungen wie zwischen iwf^*, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{w}$ haben zwischen iwF^*, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{w}$ statt und es kann die Relation (D) nunmehr durch

$\{D\}$ $$wF^* = \mu wf^*$$

ersetzt werden.

Die Gleichungen $\{C\}$ und $\{D\}$ können wir benutzen, um die Feldvektoren F und f auf Φ und Ψ zurückzuführen. Wir haben

$$wF = -\Phi, \quad wF^* = -i\mu\Psi, \quad wf = -\varepsilon\Phi, \quad wf^* = -i\Psi$$

und die Anwendung der Regel (45) führt im Hinblick auf (46) zu

(55) $$F = [w, \Phi] + i\mu[w, \Psi]^*,$$

(56) $$f = \varepsilon[w, \Phi] + i[w, \Psi]^*,$$

d. i.

$$F_{12} = (w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i\mu(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3), \text{ u. s. f.}$$
$$f_{12} = \varepsilon(w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i\,(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3), \text{ u. s. f.}$$

Wir ziehen ferner den Raum-Zeitvektor II. Art $[\Phi, \Psi]$ mit den 6 Komponenten

$$\Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2, \quad \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3, \quad \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1,$$
$$\Phi_1\Psi_4 - \Phi_4\Psi_1, \quad \Phi_2\Psi_4 - \Phi_4\Psi_2, \quad \Phi_3\Psi_4 - \Phi_4\Psi_3$$

in Betracht. Alsdann verschwindet der zugehörige Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$w[\Phi, \Psi] = -(w\bar{\Psi})\,\Phi + (w\bar{\Phi})\,\Psi$$

wegen (49) und (53) identisch. Führen wir nun den Raum-Zeit-Vektor I. Art

(57) $$\Omega = iw[\Phi, \Psi]^*$$

mit den Komponenten

$$\Omega_1 = -i \begin{vmatrix} w_2, & w_3, & w_4 \\ \Phi_2, & \Phi_3, & \Phi_4 \\ \Psi_2, & \Psi_3, & \Psi_4 \end{vmatrix}, \text{ u. s. f.}$$

ein, so folgt durch Anwendung der Regel (45):

(58) $$[\Phi, \Psi] = i[w, \Omega]^*,$$

d. i. $$\Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1 = i(w_3\Omega_4 - w_4\Omega_3), \text{ u. s. f.}$$

Der Vektor Ω erfüllt offenbar die Relation

(59) $$(w\bar{\Omega}) = w_1\Omega_1 + w_2\Omega_2 + w_3\Omega_3 + w_4\Omega_4 = 0,$$

die wir auch

$$\Omega_4 = i(\mathfrak{w}_x\Omega_1 + \mathfrak{w}_y\Omega_2 + \mathfrak{w}_z\Omega_3)$$

schreiben können, ist also wieder normal zu w. Falls $\mathfrak{w} = 0$ ist, hat man $\Phi_4 = 0$, $\Psi_4 = 0$, $\Omega_4 = 0$ und

(60) $$\Omega_1 = \Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2, \quad \Omega_2 = \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3, \quad \Omega_3 = \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1.$$

Den Raum-Zeit-Vektor I. Art Ω will ich als Ruh-Strahl bezeichnen.

Was die Relation (E) anbelangt, welche die Leitfähigkeit σ einführt, so erkennen wir zunächst, daß

$$-w\bar{s} = -(w_1s_1 + w_2s_2 + w_3s_3 + w_4s_4) = \frac{-|\mathfrak{w}|\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} + \varrho}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \varrho'$$

die Ruh-Dichte der Elektrizität (s. § 8 und § 4 am Schlusse) wird. Alsdann stellt

(61) $$s + (w\bar{s})w$$

einen Raum-Zeit-Vektor I. Art vor, der wegen $w\bar{w} = -1$ offenbar wieder normal zu w ist und den ich als Ruh-Strom bezeichnen will. Fassen wir die drei ersten Komponenten dieses Vektors als x-, y-, z-Komponente eines Raum-Vektors auf, so ist für den letzteren die Komponente nach der Richtung von $\mathfrak{w}$:

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - \frac{|\mathfrak{w}|\varrho'}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} = \frac{\mathfrak{s}_{\mathfrak{w}} - |\mathfrak{w}|\varrho}{1-\mathfrak{w}^2} = \frac{\mathfrak{J}_{\mathfrak{w}}}{1-\mathfrak{w}^2}$$

und die Komponente nach einer jeden zu $\mathfrak{w}$ senkrechten Richtung $\bar{\mathfrak{w}}$ wieder

$$\mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{w}}} = \mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{w}}};$$

es hängt dieser Raum-Vektor also sehr einfach mit dem Raum-Vektor $\mathfrak{J} = \mathfrak{s} - \varrho\mathfrak{w}$ zusammen, den wir in § 8 als Leitungsstrom bezeichneten.

Nunmehr kann durch Vergleich mit $\Phi = -wF$ die Relation (E) auf die Gestalt gebracht werden:

{E} $$s + (w\bar{s})w = -\sigma wF.$$

Diese Formel faßt wieder 4 Gleichungen zusammen, von denen jedoch, weil es sich beiderseits um zu w normale Raum-Zeit-Vektoren I. Art handelt, die vierte eine Folge der drei ersten ist.

Endlich werden wir noch die Differentialgleichungen (A) und (B) in eine typische Form umsetzen.

§ 12. Der Differentialoperator lor.

Eine 4×4-reihige Matrix

$$S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{1} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = |S_{hk}| \tag{62}$$

mit der Vorschrift, sie bei einer Lorentz-Transformation A jedesmal durch $\bar{\mathsf{A}}S\mathsf{A}$ zu ersetzen, mag eine **Raum-Zeit-Matrix** II. Art heißen. Eine derartige Matrix hat man insbesondere

in der alternierenden Matrix f, die einem Raum-Zeit-Vektor II. Art f entspricht,

in dem Produkte fF zweier solcher alternierender Matrizen f, F, das bei einer Transformation A durch $(\mathsf{A}^{-1}f\mathsf{A})(\mathsf{A}^{-1}F\mathsf{A}) = \mathsf{A}^{-1}fF\mathsf{A}$ zu ersetzen ist,

ferner, wenn w_1, w_2, w_3, w_4 und $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art sind, in der Matrix der 4×4 Elemente $S_{hk} = w_h \Omega_k$,

endlich in einem Vielfachen L der Einheitsmatrix, d. h. einer 4×4-reihigen Matrix, in der alle Elemente in der Hauptdiagonale einen gleichen Wert L haben und die übrigen Elemente sämtlich Null sind.

Wir haben es hier stets mit Funktionen von Raum-Zeitpunkten x, y, z, it zu tun und können mit Vorteil eine 1×4-reihige **Matrix, gebildet aus den Differentiationssymbolen**

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{i \partial t} \right|,$$

oder auch

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right| \tag{63}$$

geschrieben, verwenden. Für diese Matrix will ich die Abkürzung lor brauchen.

Es soll dann, wenn S wie in (62) eine Raum-Zeit-Matrix II. Art bedeutet, in sinngemäßer Übertragung der Regel für die Produktbildung von Matrizen, unter lor S die 1×4-reihige Matrix

$$| \, K_1, \; K_2, \; K_3, \; K_4 \, |$$

der Ausdrücke

$$K_k = \frac{\partial S_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3k}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4k}}{\partial x_4} \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{64}$$

verstanden werden.

Wird durch eine Lorentz-Transformation A ein neues Bezugsystem x_1', x_2', x_3', x_4' für die Raum-Zeitpunkte eingeführt, so mag analog der Operator

$$\mathrm{lor}' = \left| \frac{\partial}{\partial x_1'}, \; \frac{\partial}{\partial x_2'}, \; \frac{\partial}{\partial x_3'}, \; \frac{\partial}{\partial x_4'} \right|$$

angewandt werden. Geht dabei S in $S' = \bar{\mathsf{A}} S \mathsf{A} = | S_{hk}' |$ über, so wird dann unter lor′ S' die 1×4-reihige Matrix der Ausdrücke

$$K_k' = \frac{\partial S_{1k}'}{\partial x_1'} + \frac{\partial S_{2k}'}{\partial x_2'} + \frac{\partial S_{3k}'}{\partial x_3'} + \frac{\partial S_{4k}'}{\partial x_4'} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

zu verstehen sein. Nun gilt für die Differentiation einer beliebigen Funktion von einem Raum-Zeitpunkte die Regel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k'} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial x_k'} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_{2k} + \frac{\partial}{\partial x_3} \alpha_{3k} + \frac{\partial}{\partial x_4} \alpha_{4k}, \end{aligned}$$

die in einer leicht verständlichen Weise symbolisch als

$$\mathrm{lor}' = \mathrm{lor}\,(\mathsf{A}$$

zu deuten ist, und mit Rücksicht hierauf folgt sogleich

$$\mathrm{lor}'\, S' = \mathrm{lor}\,(\mathsf{A}(\mathsf{A}^{-1} S \mathsf{A})) = (\mathrm{lor}\, S)\, \mathsf{A}, \tag{65}$$

d. h. wenn S eine Raum-Zeit-Matrix II. Art vorstellt, so transformiert sich lor S als ein Raum-Zeit-Vektor I. Art.

Ist insbesondere L ein Vielfaches der Einheitsmatrix, so wird unter lor L die Matrix der Elemente

$$(66) \qquad \left| \frac{\partial L}{\partial x_1}, \ \frac{\partial L}{\partial x_2}, \ \frac{\partial L}{\partial x_3}, \ \frac{\partial L}{\partial x_4} \right|$$

zu verstehen sein.

Stellt $s = | s_1, s_2, s_3, s_4 |$ einen Raum-Zeit-Vektor I. Art vor, so wird

$$(67) \qquad \operatorname{lor} \bar{s} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4}$$

zu erklären sein. Treten bei Anwendung einer Lorentz-Transformation A die Zeichen lor′, s' an Stelle von lor, s, so folgt

$$\operatorname{lor}' \bar{s}' = (\operatorname{lor} \mathsf{A})(\overline{\mathsf{A}\bar{s}}) = \operatorname{lor} \bar{s},$$

d. h. lor $\bar{s}$ ist eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen.

In allen diesen Beziehungen spielt der Operator lor selbst die Rolle eines Raum-Zeit-Vektors I. Art.

Stellt f einen Raum-Zeit-Vektor II. Art vor, so hat nun $-\operatorname{lor} f$ den Raum-Zeit-Vektor I. Art mit den Komponenten

$$\begin{array}{cccc}
 & \dfrac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + & \dfrac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + & \dfrac{\partial f_{14}}{\partial x_4}, \\
\dfrac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & + & \dfrac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + & \dfrac{\partial f_{24}}{\partial x_4}, \\
\dfrac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + & \dfrac{\partial f_{32}}{\partial x_2} & + & \dfrac{\partial f_{34}}{\partial x_4}, \\
\dfrac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + & \dfrac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + & \dfrac{\partial f_{43}}{\partial x_3} &
\end{array}$$

zu bedeuten. Hiernach läßt sich das System der Differentialgleichungen (A) in der kurzen Form

$$\{\mathrm{A}\} \qquad \operatorname{lor} f = -s$$

zusammenziehen. Ganz entsprechend wird das System der Differentialgleichungen (B) zu schreiben sein:

$$\{\mathrm{B}\} \qquad \operatorname{lor} F^* = 0.$$

Die im Hinblick auf die Definition (67) von lor $\bar{s}$ gebildeten Verbindungen lor $\overline{(\operatorname{lor} f)}$ und lor $\overline{(\operatorname{lor} F^*)}$ verschwinden offenbar identisch, indem f und F^* alternierende Matrizen sind. Darnach folgt aus $\{\mathrm{A}\}$ für den Strom s die Beziehung

$$(68) \qquad \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4} = 0,$$

während die Relation

$$\text{(69)} \qquad \text{lor}\,(\overline{\text{lor}\,F^*}) = 0$$

den Sinn hat, daß die vier in $\{B\}$ angewiesenen Gleichungen nur drei unabhängige Bedingungen für den Verlauf der Feldvektoren repräsentieren.

Ich fasse nunmehr die Resultate zusammen:

Es bedeute w den Raum-Zeit-Vektor I. Art $\frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$, $\frac{i}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}$ ($\mathfrak{w}$ Geschwindigkeit der Materie), F den Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{M}$ magnetische Erregung, $\mathfrak{E}$ elektrische Kraft), f den Raum-Zeit-Vektor II. Art $\mathfrak{m}, -i\mathfrak{e}$ ($\mathfrak{m}$ magnetische Kraft, $\mathfrak{e}$ elektrische Erregung), s den Raum-Zeit-Vektor I. Art $\mathfrak{s}, i\varrho$ (ϱ elektrische Raumdichte, $\mathfrak{s}-\varrho\mathfrak{w}$ Leitungsstrom), ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit, so lauten (mit den in § 10 und § 11 erklärten Symbolen der Matrizenrechnung) die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern

$$\{A\} \qquad \text{lor}\,f = -s,$$
$$\{B\} \qquad \text{lor}\,F^* = 0,$$
$$\{C\} \qquad wf = \varepsilon wF,$$
$$\{D\} \qquad wF^* = \mu wf^*,$$
$$\{E\} \qquad s + (w\bar{s})\,w = -\sigma wF.$$

Dabei gilt $w\bar{w} = -1$, es sind die Raum-Zeit-Vektoren I. Art wF, wf, wF^*, wf^*, $s+(w\bar{s})\,w$ sämtlich normal zu w und endlich besteht für das Gleichungssystem $\{B\}$ der Zusammenhang

$$\text{lor}\,(\overline{\text{lor}\,F^*}) = 0.$$

In Anbetracht der zuletzt genannten Umstände stehen hier genau die erforderliche Anzahl von unabhängigen Gleichungen zur Verfügung, um bei den geeigneten Grenzdaten die Vorgänge vollständig zu beschreiben, wofern die Bewegung der Materie, also der Vektor $\mathfrak{w}$ als Funktion von x, y, z, t bekannt ist.

§ 13. Das Produkt der Feldvektoren fF.

Endlich fragen wir nach den Gesetzen, die zur Bestimmung des Vektors w als Funktion von x, y, z, t führen. Bei den hierauf bezüglichen Untersuchungen treten diejenigen Ausdrücke in den Vordergrund, die durch Bildung des Produkts der zwei alternierenden Matrizen

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix}, \qquad F = \begin{vmatrix} 0, & F_{12}, & F_{13}, & F_{14} \\ F_{21}, & 0, & F_{23}, & F_{24} \\ F_{31}, & F_{32}, & 0, & F_{34} \\ F_{41}, & F_{42}, & F_{43}, & 0 \end{vmatrix}$$

sich darbieten. Ich schreibe

$$(70) \qquad fF = \begin{vmatrix} S_{11}-L, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}-L, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}-L, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44}-L \end{vmatrix}$$

so, daß dabei

$$(71) \qquad S_{11}+S_{22}+S_{33}+S_{44} = 0$$

wird.

Alsdann bedeutet L die in den Indizes 1, 2, 3, 4 symmetrische Verbindung

$$(72) \qquad L = \tfrac{1}{2}(f_{23}F_{23}+f_{31}F_{31}+f_{12}F_{12}+f_{14}F_{14}+f_{24}F_{24}+f_{34}F_{34}),$$

und es wird

$$(73) \qquad \begin{aligned} S_{11} &= \tfrac{1}{2}(f_{23}F_{23}+f_{34}F_{34}+f_{42}F_{42}-f_{12}F_{12}-f_{13}F_{13}-f_{14}F_{14}), \\ S_{12} &= f_{13}F_{32}+f_{14}F_{42}, \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Indem ich die Realitätsverhältnisse zum Ausdruck bringe, will ich noch

$$(74) \qquad S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix}$$

schreiben, wobei dann

$$
\begin{aligned}
X_x &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x - \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y - \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z),\\
X_y &= \mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_y + \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_x, \quad Y_x = \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_x + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_y, \text{ u. s. f.}\\
X_t &= \mathfrak{e}_y\mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_z\mathfrak{M}_y,\\
T_x &= \mathfrak{m}_z\mathfrak{E}_y - \mathfrak{m}_y\mathfrak{E}_z, \text{ u. s. f.}\\
T_t &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z + \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z)
\end{aligned} \tag{75}
$$

und auch

$$L = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x + \mathfrak{m}_y\mathfrak{M}_y + \mathfrak{m}_z\mathfrak{M}_z - \mathfrak{e}_x\mathfrak{E}_x - \mathfrak{e}_y\mathfrak{E}_y - \mathfrak{e}_z\mathfrak{E}_z) \tag{76}$$

sämtlich reell sind. In den Theorien für ruhende Körper kommen die Verbindungen X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z unter dem Namen „Maxwellsche Spannungen", die Grössen T_x, T_y, T_z als „Poyntingscher Vektor", T_t als „elektromagnetische Energiedichte für die Volumeneinheit" vor und wird L als „Lagrangesche Funktion" bezeichnet.

Wir finden nun andererseits durch Zusammensetzung der zu f und F dualen Matrizen in umgekehrter Folge sofort

$$F^*f^* = \begin{vmatrix} -S_{11}-L, & -S_{12}, & -S_{13}, & -S_{14} \\ -S_{21}, & -S_{22}-L, & -S_{23}, & -S_{24} \\ -S_{31}, & -S_{32}, & -S_{33}-L, & -S_{34} \\ -S_{41}, & -S_{42}, & -S_{43}, & -S_{44}-L \end{vmatrix} \tag{77}$$

und können hiernach setzen

$$fF = S - L, \quad F^*f^* = -S - L, \tag{78}$$

indem wir unter L das Vielfache $L.1$ der Einheitsmatrix, d. h. die Matrix der Elemente

$$|Le_{hk}| \qquad \begin{pmatrix} e_{hh} = 1, \ e_{hk} = 0, \ h \gtrless k \\ h, k = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}$$

verstehen.

Daraus folgern wir weiter, indem hier $SL = LS$ ist,

$$F^*f^*fF = (-S-L)(S-L) = -SS + L^2,$$

und finden, da $f^*f = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f$, $F^*F = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} F$ ist, die interessante Beziehung:

$$SS = L^2 - \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} f \, \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} F, \tag{79}$$

d. h. das Produkt der Matrix S in sich selbst ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix, eine Matrix, in welcher außerhalb der Hauptdiagonale alle Elemente Null und in der Diagonale alle Elemente gleich sind und als gemeinsamen Wert

die hier rechts angegebene Größe haben. Es gelten also allgemein die Relationen

$$S_{h1}S_{1k}+S_{h2}S_{2k}+S_{h3}S_{3k}+S_{h4}S_{4k}=0 \tag{80}$$

bei ungleichen Indizes h, k aus der Reihe 1, 2, 3, 4 und

$$S_{h1}S_{1h}+S_{h2}S_{2h}+S_{h3}S_{3h}+S_{h4}S_{4h}=L^2-\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}f\,\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}F \tag{81}$$

für $h=1, 2, 3, 4$.

Indem wir jetzt anstatt F und f in den Verbindungen (72), (73) mittelst (55), (56), (57) die elektrische Ruh-Kraft Φ, die magnetische Ruh-Kraft Ψ, den Ruh-Strahl Ω einführen, gelangen wir zu den Ausdrücken:

$$L=-\tfrac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi}+\tfrac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi}, \tag{82}$$

$$\begin{aligned} S_{hk} = {} & -\tfrac{1}{2}\varepsilon\Phi\overline{\Phi}e_{hk}-\tfrac{1}{2}\mu\Psi\overline{\Psi}e_{hk} \\ & +\varepsilon(\Phi_h\Phi_k-\Phi\overline{\Phi}w_hw_k)+\mu(\Psi_h\Psi_k-\Psi\overline{\Psi}w_hw_k) \\ & -\Omega_hw_k-\varepsilon\mu w_h\Omega_k \qquad (h, k=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \tag{83}$$

darin sind noch einzusetzen

$$\Phi\overline{\Phi}=\Phi_1^2+\Phi_2^2+\Phi_3^2+\Phi_4^2, \quad \Psi\overline{\Psi}=\Psi_1^2+\Psi_2^2+\Psi_3^2+\Psi_4^2,$$
$$e_{hh}=1, \quad e_{hk}=0\,(h\gtrless k).$$

Nämlich jedenfalls ist die rechte Seite von (82) ebenso wie L eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen und stellen die 4×4 Elemente rechts in (83) ebenso wie die S_{hk} eine Raum-Zeit-Matrix II. Art dar. Mit Rücksicht hierauf genügt es schon, um die Relationen (82), (83) allgemein behaupten zu können, sie nur für den Fall $w_1=0$, $w_2=0$, $w_3=0$, $w_4=i$ zu verifizieren. Für diesen Fall $\mathfrak{w}=0$ aber kommen (83) und (82) durch (47), (51), (60) einerseits, $\mathfrak{e}=\varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}=\mu\mathfrak{m}$ andererseits unmittelbar auf die Gleichungen (75) und (76) hinaus.

Der Ausdruck rechts in (81), der

$$=(\tfrac{1}{2}(\mathfrak{m}\mathfrak{M}-\mathfrak{e}\mathfrak{E}))^2+(\mathfrak{e}\mathfrak{m})(\mathfrak{E}\mathfrak{M})$$

ist, erweist sich durch $(\mathfrak{e}\mathfrak{m})=\varepsilon\Phi\overline{\Psi}$, $(\mathfrak{E}\mathfrak{M})=\mu\Phi\overline{\Psi}$ als $\geqq 0$; die Quadratwurzel aus ihm, $\geqq 0$ genommen, mag im Hinblick auf (79) mit $\mathrm{Det}^{\frac{1}{4}}S$ bezeichnet werden.

Für $\overline{S}$, die transponierte Matrix von S, folgt aus (78), da $\bar{f}=-f$, $\overline{F}=-F$ ist,

$$Ff=\overline{S}-L, \quad f^*F^*=-\overline{S}-L. \tag{84}$$

Sodann ist

$$S - \bar{S} = |S_{hk} - S_{kh}|$$

eine alternierende Matrix und bedeutet zugleich einen Raum-Zeit-Vektor II. Art. Aus den Ausdrücken (83) entnehmen wir sofort

(85) $$S - \bar{S} = -(\varepsilon\mu - 1)[w, \Omega],$$

woraus noch (vgl. (57), (58))

(86) $$w(S - \bar{S})^* = 0,$$

(87) $$w(S - \bar{S}) = (\varepsilon\mu - 1)\Omega$$

herzuleiten ist.

Wenn in einem Raum-Zeitpunkte die Materie ruht, $\mathfrak{w} = 0$ ist, so bedeutet (86) das Bestehen der Gleichungen

$$Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x, \quad Y_x = X_y;$$

ferner hat man dann nach (83):

$$T_x = \Omega_1, \qquad T_y = \Omega_2, \qquad T_z = \Omega_3,$$
$$X_t = \varepsilon\mu\Omega_1, \quad Y_t = \varepsilon\mu\Omega_2, \quad Z_t = \varepsilon\mu\Omega_3.$$

Nun wird man durch eine geeignete Drehung des räumlichen Koordinatensystems der x, y, z um den Nullpunkt es bewirken können, daß

$$Z_y = Y_z = 0, \quad X_z = Z_x = 0, \quad Y_x = X_y = 0$$

ausfallen. Nach (71) hat man

(88) $$X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0$$

und nach dem Ausdruck in (83) ist hier jedenfalls $T_t > 0$. Im speziellen Falle, daß auch Ω verschwindet, folgt dann aus (81)

$$X_x^2 = Y_y^2 = Z_z^2 = T_t^2 = (\mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S)^2$$

und sind T_t und von den drei Größen X_x, Y_y, Z_z eine $= + \mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S$, die zwei anderen $= - \mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S$. Verschwindet Ω nicht, so sei etwa $\Omega_3 \neq 0$, dann hat man nach (80) insbesondere

$$T_z X_t = 0, \quad T_z Y_t = 0, \quad Z_z T_z + T_z T_t = 0$$

und findet demnach $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $Z_z = -T_t$. Aus (81) und im Hinblick auf (88) folgt alsdann

$$X_x = -Y_y = \pm \mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S,$$
$$-Z_z = T_t = \sqrt{\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} S + \varepsilon\mu\Omega_3^2} > \mathrm{Det}^{\frac{1}{4}} S. -$$

Von ganz besonderer Bedeutung wird endlich **der Raum-Zeit-Vektor I. Art**

$$(89) \qquad K = \operatorname{lor} S,$$

für den wir jetzt eine wichtige Umformung nachweisen wollen.

Nach (78) ist $S = L + fF$ und es folgt zunächst

$$\operatorname{lor} S = \operatorname{lor} L + \operatorname{lor} fF.$$

Das Symbol lor bedeutet einen Differentiationsprozeß, der in $\operatorname{lor} fF$ einerseits die Komponenten von f, andererseits die Komponenten von F betreffen wird. Entsprechend zerlegt sich $\operatorname{lor} fF$ additiv in einen ersten und einen zweiten Teil. Der erste Teil wird offenbar das Produkt der Matrizen $(\operatorname{lor} f)F$ sein, darin $\operatorname{lor} f$ als 1×4-reihige Matrix für sich aufgefaßt. Der zweite Teil ist derjenige Teil von $\operatorname{lor} fF$, in dem die Differentiationen nur die Komponenten von F betreffen. Nun entnehmen wir aus (78)

$$fF = -F^* f^* - 2L;$$

infolgedessen wird dieser zweite Teil von $\operatorname{lor} fF$ sein $-(\operatorname{lor} F^*)f^*$ $+$ dem Teil von $-2 \operatorname{lor} L$, in dem die Differentiationen nur die Komponenten von F betreffen. Danach entsteht

$$(90) \qquad \operatorname{lor} S = (\operatorname{lor} f)F - (\operatorname{lor} F^*)f^* + N,$$

wo N den Vektor mit den Komponenten

$$N_h = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f_{23}}{\partial x_h} F_{23} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_h} F_{31} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_h} F_{12} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_h} F_{14} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_h} F_{24} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h} F_{34}$$
$$- f_{23} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_h} - f_{31} \frac{\partial F_{31}}{\partial x_h} - f_{12} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_h} - f_{14} \frac{\partial F_{14}}{\partial x_h} - f_{24} \frac{\partial F_{24}}{\partial x_h} - \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h} F_{34}\Big)$$
$$(h = 1, 2, 3, 4)$$

bedeutet. Durch Benutzung der Grundgleichungen $\{A\}$ und $\{B\}$ geht (90) in die **fundamentale Relation**

$$(91) \qquad \operatorname{lor} S = -sF + N$$

über.

Im Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, wo $f = F$ ist, verschwindet N identisch.

Allgemein gelangen wir auf Grund von (55), (56) und im Hinblick auf den Ausdruck (82) von L und auf (57) zu folgenden Ausdrücken der Komponenten von N:

$$(92)\qquad N_h = -\tfrac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_h} - \tfrac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial x_h}$$
$$+(\varepsilon\mu-1)\left(\mathfrak{Q}_1\frac{\partial w_1}{\partial x_h}+\mathfrak{Q}_2\frac{\partial w_2}{\partial x_h}+\mathfrak{Q}_3\frac{\partial w_3}{\partial x_h}+\mathfrak{Q}_4\frac{\partial w_4}{\partial x_h}\right)$$
$$\text{für } h = 1, 2, 3, 4.$$

Machen wir noch von (59) Gebrauch und bezeichnen den Raum-Vektor, der $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3$ als x-, y-, z-Komponenten hat, mit $\mathfrak{W}$, so kann der letzte, dritte Bestandteil von (92) auch auf die Gestalt

$$(93)\qquad \frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial x_h}\right)$$

gebracht werden, wobei die Klammer das skalare Produkt der darin aufgeführten zwei Vektoren anzeigt.

§ 14. Die ponderomotorischen Kräfte.

Wir stellen jetzt die Relation $K = \operatorname{lor} S = -sF+N$ ausführlicher dar; sie liefert die 4 Gleichungen

$$(94)\qquad K_1 = \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}-\frac{\partial X_t}{\partial t} = \varrho\mathfrak{E}_x+\mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_z-\mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_y$$
$$-\tfrac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\tfrac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial x}\right),$$

$$(95)\qquad K_2 = \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}-\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \varrho\mathfrak{E}_y+\mathfrak{s}_z\mathfrak{M}_x-\mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_z$$
$$-\tfrac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}-\tfrac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial y}\right),$$

$$(96)\qquad K_3 = \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}-\frac{\partial Z_t}{\partial t} = \varrho\mathfrak{E}_z+\mathfrak{s}_x\mathfrak{M}_y-\mathfrak{s}_y\mathfrak{M}_x$$
$$-\tfrac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}-\tfrac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial z}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial z}\right),$$

$$(97)\qquad \frac{1}{i}K_4 = -\frac{\partial T_x}{\partial x}-\frac{\partial T_y}{\partial y}-\frac{\partial T_z}{\partial z}-\frac{\partial T_t}{\partial t} = \mathfrak{s}_x\mathfrak{E}_x+\mathfrak{s}_y\mathfrak{E}_y+\mathfrak{s}_z\mathfrak{E}$$
$$+\tfrac{1}{2}\Phi\overline{\Phi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Psi\overline{\Psi}\frac{\partial\mu}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu-1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}}\left(\mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t}\right).$$

Es ist nun meine Meinung, daß bei den elektromagnetischen Vorgängen die ponderomotorische Kraft, die an der Materie in einem Raum-Zeitpunkte x, y, z, t angreift, berechnet für die Volumeneinheit, als x-, y-, z-

Komponenten die drei ersten Komponenten des zum Raum-Zeit-Vektor w normalen Raum-Zeit-Vektors

$$K + (w\overline{K})\,w \tag{98}$$

hat und daß ferner der Energiesatz seinen Ausdruck in der obigen vierten Relation findet.

Diese Meinung eingehend zu begründen, sei einem folgenden Aufsatze vorbehalten; hier will ich nur noch durch einige Ausführungen zur Mechanik dieser Meinung eine gewisse Stütze geben.

Im Grenzfalle $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ ist der Vektor $N = 0$, $\mathfrak{s} = \varrho\mathfrak{w}$, es wird dadurch $w\overline{K} = 0$ und es decken sich diese Ansätze mit den in der Elektronentheorie üblichen.

Anhang. Mechanik und Relativitätspostulat.

Es wäre höchst unbefriedigend, dürfte man die neue Auffassung des Zeitbegriffs, die durch die Freiheit der Lorentz-Transformationen gekennzeichnet ist, nur für ein Teilgebiet der Physik gelten lassen.

Nun sagen viele Autoren, die klassische Mechanik stehe im Gegensatz zu dem Relativitätspostulate, das hier für die Elektrodynamik zu Grunde gelegt ist.

Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, fassen wir eine spezielle Lorentz-Transformation ins Auge, wie sie durch die Gleichungen (10), (11), (12) dargestellt ist, mit einem von Null verschiedenen Vektor $\mathfrak{v}$ von irgend einer Richtung und einem Betrage q, der < 1 ist. Wir wollen aber für einen Moment noch keine Verfügung über das Verhältnis von Längeneinheit und Zeiteinheit getroffen denken und demgemäß in jenen Gleichungen statt t, t', q schreiben $ct, ct', \dfrac{q}{c}$, wobei dann c eine gewisse positive Konstante vorstellt und $q < c$ sein muß. Die genannten Gleichungen verwandeln sich dadurch in

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \quad \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \frac{c(\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt)}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad t' = \frac{-q\mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} + c^2 t}{c\sqrt{c^2 - q^2}};$$

es bedeutet, wie wir erinnern, $\mathfrak{r}$ den Raumvektor x, y, z und $\mathfrak{r}'$ den Raumvektor x', y', z'.

Gehen wir in diesen Gleichungen, während wir $\mathfrak{v}$ festhalten, zur Grenze $c = \infty$ über, so entsteht aus ihnen

$$\mathfrak{r}'_{\bar{\mathfrak{v}}} = \mathfrak{r}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \quad \mathfrak{r}'_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{v}} - qt, \quad t' = t.$$

Diese neuen Gleichungen würden nun bedeuten einen Übergang vom räumlichen Koordinatensysteme x, y, z zu einem anderen räumlichen Koordinatensysteme x', y', z' mit parallelen Axen, dessen Nullpunkt in Bezug auf das erste in gerader Linie mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet, während der Zeitparameter ganz unberührt bleiben soll.

Auf Grund dieser Bemerkung darf man sagen:

Die klassische Mechanik postuliert eine Kovarianz der physikalischen Gesetze für die Gruppe der homogenen linearen Transformationen des Ausdrucks

$$(1) \qquad -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2$$

in sich mit der Bestimmung $c = \infty$.

Nun wäre es geradezu verwirrend, in einem Teilgebiet der Physik eine Kovarianz der Gesetze für die Transformationen des Ausdrucks (1) in sich bei einem bestimmten endlichen c, in einem anderen Teilgebiete aber für $c = \infty$ zu finden. Dass die Newtonsche Mechanik nur diese Kovarianz für $c = \infty$ behaupten und sie nicht für den Fall von c als Lichtgeschwindigkeit ersinnen konnte, bedarf keiner Erklärung. Sollte aber nicht gegenwärtig der Versuch zulässig sein, jene traditionelle Kovarianz für $c = \infty$ nur als eine durch die Erfahrungen zunächst gewonnene Approximation an eine exaktere Kovarianz der Naturgesetze für ein gewisses endliches c aufzufassen?

Ich möchte ausführen, daß durch eine Reformierung der Mechanik, wobei an Stelle des Newtonschen Relativitätspostulates mit $c = \infty$ ein solches für ein endliches c tritt, sogar der axiomatische Aufbau der Mechanik erheblich an Vollendung zu gewinnen scheint.

Das Verhältnis der Zeiteinheit zur Längeneinheit sei derart normiert, daß das Relativitätspostulat mit $c = 1$ in Betracht kommt.

Indem ich jetzt geometrische Bilder auf die Mannigfaltigkeit der vier Variabeln x, y, z, t übertragen will, mag es zum leichteren Verständnis des Folgenden bequem sein, zunächst y, z völlig außer Betracht zu lassen und x und t als irgendwelche schiefwinklige Parallelkoordinaten in einer Ebene zu deuten.

Ein Raum-Zeit-Nullpunkt $O\,(x, y, z, t = 0, 0, 0, 0)$ wird bei den Lorentz-Transformationen festgehalten. Das Gebilde

$$(2) \qquad -x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1, \qquad t > 0,$$

eine hyperboloidische Schale, umfaßt den Raum-Zeitpunkt $A(x, y, z, t = 0, 0, 0, 1)$ und alle Raum-Zeitpunkte A', die nach Lorentz-Transformationen als $(x', y', z', t' = 0, 0, 0, 1)$ in den neu eingeführten Bestimmungsstücken x', y', z', t' auftreten.

Die Richtung eines Radiusvektors OA' von O nach einem Punkte A' von (2) und die Richtungen der in A' an (2) gehenden Tangenten sollen normal zu einander heißen.

Verfolgen wir eine bestimmte Stelle der Materie in ihrer Bahn zu allen Zeiten t. Die Gesamtheit der Raum-Zeitpunkte x, y, z, t, die der Stelle zu den verschiedenen Zeiten t entsprechen, nenne ich eine Raum-Zeitlinie.

Die Aufgabe, die Bewegung der Materie zu bestimmen, ist dahin aufzufassen: Es soll für jeden Raum-Zeitpunkt die Richtung der daselbst durchlaufenden Raum-Zeitlinie festgestellt werden.

Einen Raum-Zeitpunkt $P(x, y, z, t)$ auf Ruhe transformieren, heißt, durch eine Lorentz-Transformation ein Bezugsystem x', y', z', t' einführen derart, daß die t'-Axe OA' die Richtung erlangt, die in P die dort durchlaufende Raum-Zeitlinie zeigt. Der Raum $t' =$ konst., der durch P zu legen ist, soll dann der in P auf der Raum-Zeitlinie normale Raum heissen. Dem Zuwachs dt der Zeit t von P aus entspricht der Zuwachs

$$(3) \qquad d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2} = \frac{dx_4}{w_4} \text{ [1]}$$

des hierbei einzuführenden Parameters t'. Der Wert des Integrals

$$\int d\tau = \int \sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)},$$

auf der Raum-Zeitlinie von irgend einem festen Anfangspunkte P^0 an bis zum variabel gedachten Endpunkte P gerechnet, heiße die Eigenzeit der betreffenden Stelle der Materie im Raum-Zeitpunkte P. (Es ist das eine Verallgemeinerung des von Lorentz für gleichförmige Bewegungen gebildeten Begriffs der Ortszeit.)

Nehmen wir einen räumlich ausgedehnten Körper R^0 zu einer bestimmten Zeit t^0, so soll der Bereich aller durch die Raum-Zeitpunkte R^0, t^0 führenden Raum-Zeitlinien ein Raum-Zeitfaden heißen.

Haben wir einen analytischen Ausdruck $\Theta(x, y, z, t)$, sodaß $\Theta(x, y, z, t) = 0$ von jeder Raum-Zeitlinie des Fadens in einem Punkte getroffen wird, wobei

1) Die Bezeichnung mit Indizes und die Zeichen $\mathfrak{w}$, w nehmen wir wieder in dem früher festgesetzten Sinne in Gebrauch (s. § 3 und § 4).

$$-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)^2 > 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} > 0$$

ist, so wollen wir die Gesamtheit Q der betreffenden Treffpunkte einen Querschnitt des Fadens nennen. An jedem Punkte $P(x, y, z, t)$ eines solchen Querschnitts können wir durch eine Lorentz-Transformation ein Bezugsystem x', y', z', t' einführen, sodaß hernach

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t'} > 0$$

wird. Die Richtung der betreffenden, eindeutig bestimmten t'-Axe heiße die obere Normale des Querschnitts Q im Punkte P und der Wert $dJ = \iiint dx'\,dy'\,dz'$ für eine Umgebung von P auf dem Querschnitt ein Inhaltselement des Querschnitts. In diesem Sinne ist R^0, t^0 selbst als der zur t-Axe normale Querschnitt $t = t^0$ des Fadens und das Volumen des Körpers R^0 als der Inhalt dieses Querschnitts zu bezeichnen.

Indem wir den Raum R^0 nach einem Punkte hin konvergieren lassen, kommen wir zum Begriffe eines unendlich dünnen Raum-Zeitfadens. In einem solchen denken wir uns stets eine Raum-Zeitlinie irgendwie als Hauptlinie ausgezeichnet und verstehen unter der Eigenzeit des Fadens die auf dieser Hauptlinie festgestellte Eigenzeit, unter den Normalquerschnitten des Fadens seine Durchquerungen durch die in den Punkten der Hauptlinie auf dieser normalen Räume.

Wir formulieren nunmehr das Prinzip von der Erhaltung der Massen.

Jedem Raume R zu einer Zeit t gehört eine positive Grösse, die Masse in R zur Zeit t, zu. Konvergiert R nach einem Punkte x, y, z, t hin, so nähere sich der Quotient aus dieser Masse und dem Volumen von R einem Grenzwert $\mu(x, y, z, t)$, der Massendichte im Raum-Zeitpunkte x, y, z, t.

Das Prinzip von der Erhaltung der Massen besagt: Für einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden ist das Produkt μdJ aus der Massendichte μ an einer Stelle x, y, z, t des Fadens (d. h. der Hauptlinie des Fadens) und dem Inhalt dJ des durch die Stelle gehenden zur t-Axe normalen Querschnitts stets längs des ganzen Fadens konstant.

Nun wird als Inhalt dJ_n des durch x, y, z, t gelegten Normalquerschnitts des Fadens

$$dJ_n = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} dJ = -iw_4 dJ = \frac{dt}{d\tau} dJ \tag{4}$$

zu rechnen sein und es möge

$$\nu = \frac{\mu}{-iw_4} = \mu\sqrt{1-\mathfrak{w}^2} = \mu\frac{d\tau}{dt} \tag{5}$$

als **Ruh-Massendichte** an der Stelle x, y, z, t definiert werden. Alsdann kann das Prinzip von der Erhaltung der Massen auch so formuliert werden:

Für einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden ist das Produkt aus der Ruh-Massendichte und dem Inhalt des Normalquerschnitts an einer Stelle des Fadens stets längs des ganzen Fadens konstant.

In einem beliebigen Raum-Zeitfaden sei ein erster Querschnitt Q^0 und sodann ein zweiter Querschnitt Q^1 angebracht, der mit Q^0 dessen Punkte auf der Begrenzung des Fadens, aber nur diese gemein hat, und die Raum-Zeitlinien innerhalb des Fadens mögen auf Q größere Werte t als auf Q^0 zeigen. Das von Q^0 und Q^1 zusammen begrenzte, im Endlichen gelegene Gebiet soll dann eine **Raum-Zeit-Sichel**, Q^0 die **untere**, Q^1 die **obere** Begrenzung der Sichel heißen.

Denken wir uns den Faden in viele sehr dünne Raum-Zeitfäden zerlegt, so entspricht jedem Eintritt eines dünnen Fadens in die untere Begrenzung der Sichel ein Austritt aus der oberen, wobei für beide das im Sinne von (4) und (5) ermittelte Produkt νdJ_n jedesmal gleichen Wert hat. Es verschwindet daher die Differenz der zwei Integrale $\int \nu dJ_n$, das erste erstreckt über die obere, das zweite über die untere Begrenzung der Sichel. Diese Differenz findet sich nach einem bekannten Theoreme der Integralrechnung gleich dem Integrale

$$\iiiint \mathrm{lor}\, \nu\bar{w}\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

erstreckt über das ganze Gebiet der Sichel, wobei (vgl. (67) in § 12)

$$\mathrm{lor}\, \nu\bar{w} = \frac{\partial \nu w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_4}{\partial x_4}$$

ist. Wird die Sichel auf einen Raum-Zeitpunkt x, y, z, t zusammengezogen, so folgt hiernach die Differentialgleichung

$$\mathrm{lor}\, \nu\bar{w} = 0, \tag{6}$$

d. i. die **Kontinuitätsbedingung**

$$\frac{\partial \mu \mathfrak{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu \mathfrak{w}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Wir bilden ferner, über das ganze Gebiet einer Raum-Zeit-Sichel erstreckt, das Integral

$$(7) \qquad \mathsf{N} = \iiiint \nu \, dx \, dy \, dz \, dt.$$

Wir zerschneiden die Sichel in dünne Raum-Zeitfäden und jeden dieser Fäden weiter nach kleinen Elementen $d\tau$ seiner Eigenzeit, die aber noch gegen die Lineardimensionen der Normalquerschnitte groß sind, setzen die Masse eines solchen Fadens $\nu dJ_n = dm$ und schreiben noch τ^0 und τ^1 für die Eigenzeit des Fadens auf der unteren bezw. der oberen Begrenzung der Sichel; alsdann ist das Integral (7) auch zu deuten als

$$\iint \nu dJ_n \, d\tau = \int (\tau^1 - \tau^0) \, dm$$

über die sämtlichen Fäden in der Sichel.

Nun fasse ich die Raum-Zeitlinien innerhalb einer Raum-Zeit-Sichel gleichsam wie substanzielle Kurven aus substanziellen Punkten bestehend auf und denke sie mir einer kontinuierlichen Lagenveränderung innerhalb der Sichel in folgender Art unterworfen. Die ganzen Kurven sollen irgendwie unter Festhaltung der Endpunkte auf der unteren und der oberen Begrenzung der Sichel verrückt und die einzelnen substanziellen Punkte auf ihnen dabei so geführt werden, daß sie stets normal zu den Kurven fortschreiten. Der ganze Prozeß soll analytisch mittelst eines Parameters ϑ darzustellen sein und dem Werte $\vartheta = 0$ sollen die Kurven in dem wirklich stattfindenden Verlauf der Raum-Zeitlinien innerhalb der Sichel entsprechen. Ein solcher Prozeß soll eine virtuelle Verrückung in der Sichel heißen.

Der Punkt x, y, z, t in der Sichel für $\vartheta = 0$ möge beim Parameterwerte ϑ nach $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $t + \delta t$ gekommen sein; letztere Größen sind dann Funktionen von x, y, z, t, ϑ. Fassen wir wieder einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden an der Stelle x, y, z, t auf mit einem Normalquerschnitte von einem Inhalte dJ_n und ist $dJ_n + \delta dJ_n$ der Inhalt des Normalquerschnitts an der entsprechenden Stelle des variierten Fadens, so wollen wir dem Prinzipe von der Erhaltung der Massen in der Weise Rechnung tragen, daß wir an dieser variierten Stelle eine Ruh-Massendichte $\nu + \delta\nu$ gemäß

$$(8) \qquad (\nu + \delta\nu)(dJ_n + \delta dJ_n) = \nu dJ_n = dm$$

annehmen, unter ν die wirkliche Ruh-Massendichte an x, y, z, t verstanden. Zufolge dieser Festsetzung variiert dann das Integral (7), über das Gebiet der Sichel erstreckt, bei der virtuellen Verrückung als eine bestimmte Funktion $\mathsf{N} + \delta\mathsf{N}$ von ϑ und wir wollen diese Funktion $\mathsf{N} + \delta\mathsf{N}$ die **Massenwirkung** bei der virtuellen Verrückung nennen.

Ziehen wir die Schreibweise mit Indizes heran, so wird sein:

$$(9) \qquad d(x_h + \delta x_h) = dx_h + \sum_k \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta} d\vartheta \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}.$$

Nun leuchtet auf Grund der schon gemachten Bemerkungen alsbald ein, daß der Wert von $\mathsf{N} + \delta\mathsf{N}$ beim Parameterwerte ϑ sein wird:

$$(10) \qquad \mathsf{N} + \delta\mathsf{N} = \iiiint \nu \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau} dx\,dy\,dz\,dt,$$

über die Sichel erstreckt, wobei $d(\tau + \delta\tau)$ diejenige Größe bedeutet, die sich aus

$$\sqrt{-(dx_1 + d\,\delta x_1)^2 - (dx_2 + d\,\delta x_2)^2 - (dx_3 + d\,\delta x_3)^2 - (dx_4 + d\,\delta x_4)^2}$$

mittelst (9) und

$$dx_1 = w_1\,d\tau, \quad dx_2 = w_2\,d\tau, \quad dx_3 = w_3\,d\tau, \quad dx_4 = w_4\,d\tau, \quad d\vartheta = 0$$

ableitet; es ist also

$$(11) \qquad \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau} = \sqrt{-\sum_h \left(w_h + \sum_k \frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_k} w_k\right)^2} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir den Wert des Differentialquotienten

$$(12) \qquad \left(\frac{d(\mathsf{N} + \delta\mathsf{N})}{d\vartheta}\right)_{(\vartheta = 0)}$$

einer Umformung unterwerfen. Da jedes δx_h als Funktion der Argumente $x_1, x_2, x_3, x_4, \vartheta$ für $\vartheta = 0$ allgemein verschwindet, so ist auch allgemein $\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial x_k} = 0$ für $\vartheta = 0$. Setzen wir nun

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial\,\delta x_h}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta = 0} = \xi_h \qquad (h = 1, 2, 3, 4),$$

so folgt auf Grund von (10) und (11) für den Ausdruck (12):

$$-\iiiint \nu \sum_h w_h \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_2} w_2 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_3} w_3 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_4} w_4\right) dx\,dy\,dz\,dt.$$

Für die Systeme x_1, x_2, x_3, x_4 auf der Begrenzung der Sichel sollen $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4$ bei jedem Werte ϑ verschwinden und sind

daher auch $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ überall Null. Danach verwandelt sich das letzte Integral durch partielle Integration in

$$\iiiint \sum_h \xi_h \left(\frac{\partial \nu w_h w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_h w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_h w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_h w_4}{\partial x_4} \right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Darin ist der Klammerausdruck

$$= w_h \sum_k \frac{\partial \nu w_k}{\partial x_k} + \nu \sum_k w_k \frac{\partial w_h}{\partial x_k}.$$

Die erste Summe hier verschwindet zufolge der Kontinuitätsbedingung (6), die zweite läßt sich darstellen als

$$\frac{\partial w_h}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_3}\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_4}\frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dw_h}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_h}{d\tau}\right)$$

wobei durch $\frac{d}{d\tau}$ Differentialquotienten in Richtung der Raum-Zeitlinie einer Stelle angedeutet werden. Für den Differentialquotienten (12) resultiert damit endlich der Ausdruck

$$(14) \qquad \iiiint \nu \left(\frac{dw_1}{d\tau}\xi_1 + \frac{dw_2}{d\tau}\xi_2 + \frac{dw_3}{d\tau}\xi_3 + \frac{dw_4}{d\tau}\xi_4 \right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Für eine virtuelle Verrückung in der Sichel hatten wir noch die Forderung gestellt, daß die substanziell gedachten Punkte normal zu den aus ihnen hergestellten Kurven fortschreiten sollten; dies bedeutet für $\vartheta = 0$, daß die ξ_h der Bedingung

$$(15) \qquad w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

zu entsprechen haben.

Denken wir nun an die Maxwellschen Spannungen in der Elektrodynamik ruhender Körper und betrachten wir andererseits unsere Ergebnisse in den §§ 12 und 13, so liegt eine gewisse Anpassung des Hamiltonschen Prinzipes für kontinuierlich ausgedehnte elastische Medien an das Relativitätspostulat nahe.

An jedem Raum-Zeitpunkte sei (wie in § 13) eine Raum-Zeit-Matrix II. Art

$$(16) \quad S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix}$$

bekannt, worin $X_x, Y_x, \ldots Z_z, T_x, \ldots X_t, \ldots T_t$ reelle Größen sind.

Für eine virtuelle Verrückung in einer Raum-Zeit-Sichel bei den vorhin angewandten Bezeichnungen möge der Wert des Integrals

$$W + \delta W = \iiiint \left(\sum_{h,k} S_{hk} \frac{\partial (x_k + \delta x_k)}{\partial x_h} \right) dx\, dy\, dz\, dt, \tag{17}$$

über das Gebiet der Sichel erstreckt, die Spannungswirkung bei der virtuellen Verrückung heißen.

Die hier vorkommende Summe, ausführlicher und mit reellen Größen geschrieben, ist

$$\begin{gathered} X_x + Y_y + Z_z + T_t \\ + X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \cdots + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ - X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t} - \cdots + T_x \frac{\partial \delta t}{\partial x} + \cdots + T_t \frac{\partial \delta t}{\partial t}. \end{gathered}$$

Wir wollen nun folgendes Minimalprinzip für die Mechanik ansetzen:

Wird irgend eine Raum-Zeit-Sichel abgegrenzt, so soll bei jeder virtuellen Verrückung in der Sichel die Summe aus der Massenwirkung und aus der Spannungswirkung für den wirklich stattfindenden Verlauf der Raum-Zeitlinien in der Sichel stets ein Extremum sein.

Der Sinn dieser Aussage ist, daß bei jeder virtuellen Verrückung in den vorhin erklärten Zeichen

$$\left(\frac{d(\delta \mathrm{N} + \delta W)}{d\vartheta} \right)_{\vartheta = 0} = 0 \tag{18}$$

sein soll.

Nach den Methoden der Variationsrechnung folgen aus diesem Minimalprinzipe unter Rücksichtnahme auf die Bedingung (15) und mittelst der Umformung (14) sogleich die folgenden vier Differentialgleichungen

$$\nu \frac{dw_h}{d\tau} = K_h + \varkappa w_h \qquad (h = 1, 2, 3, 4), \tag{19}$$

wo

$$K_h = \frac{\partial S_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2h}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3h}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4h}}{\partial x_4} \tag{20}$$

die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors I. Art $K = \mathrm{lor}\, S$ sind und $\varkappa$ ein Faktor ist, dessen Bestimmung auf Grund von $w\bar{w} = -1$ zu erfolgen hat. Durch Multiplikation von (19) mit w_h und nach-

herige Summation über $h = 1, 2, 3, 4$ findet man $\varkappa = K\bar{w}$ und es wird $K + (K\bar{w})w$ offenbar ein zu w normaler Raum-Zeit-Vektor I. Art. Schreiben wir die Komponenten dieses Vektors

$$X,\ Y,\ Z,\ iT,$$

so gelangen wir nunmehr zu folgenden Gesetzen für die Bewegung der Materie:

$$(21)\qquad \begin{aligned} \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= X, \\ \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= Y, \\ \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= Z, \\ \nu \frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= T. \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1$$

und

$$X\frac{dx}{d\tau} + Y\frac{dy}{d\tau} + Z\frac{dz}{d\tau} = T\frac{dt}{d\tau},$$

und auf Grund dieser Umstände würde sich die vierte der Gleichungen (21) als eine Folge der drei ersten darunter ansehen lassen.

Aus (21) leiten wir weiter die Gesetze für die Bewegung eines materiellen Punktes, das soll heißen für den Verlauf eines unendlich dünnen Raum-Zeitfadens ab.

Es bezeichne x, y, z, t einen Punkt der im Faden irgendwie angenommenen Hauptlinie. Wir bilden die Gleichungen (21) für die Punkte des Normalquerschnitts des Fadens durch x, y, z, t und integrieren sie, mit dem Inhaltselement des Querschnitts multipliziert, über den ganzen Raum des Normalquerschnitts. Sind die Integrale der rechten Seiten dabei R_x, R_y, R_z, R_t und ist m die konstante Masse des Fadens, so entsteht

$$\begin{aligned} m\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} &= R_x, \\ m\frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} &= R_y, \\ m\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} &= R_z, \\ m\frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} &= R_t. \end{aligned}$$

Dabei ist wieder R mit den Komponenten R_x, R_y, R_z, iR_t ein Raum-Zeit-Vektor I. Art, der zu dem Raum-Zeit-Vektor I. Art w, Geschwindigkeit des materiellen Punktes, mit den Komponenten

$$\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{dz}{d\tau}, \quad i\frac{dt}{d\tau},$$

normal ist. Wir wollen diesen Vektor R die bewegende Kraft des materiellen Punktes nennen.

Integriert man jedoch die Gleichungen statt über den Normalquerschnitt des Fadens entsprechend über den zur t-Axe normalen Querschnitt des Fadens, der durch x, y, z, t gelegt ist, so entstehen (s. (4)) die Gleichungen (22), multipliziert noch mit $\frac{d\tau}{dt}$, insbesondere als letzte Gleichung darunter

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \mathfrak{w}_x R_x \frac{d\tau}{dt} + \mathfrak{w}_y R_y \frac{d\tau}{dt} + \mathfrak{w}_z R_z \frac{d\tau}{dt}.$$

Man wird nun die rechte Seite als Arbeitsleistung am materiellen Punkte für die Zeiteinheit aufzufassen haben. In der Gleichung selbst wird man dann den Energiesatz für die Bewegung des materiellen Punktes sehen und den Ausdruck

$$m\left(\frac{dt}{d\tau} - 1\right) = m\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{w}^2}} - 1\right) = m\left(\tfrac{1}{2}|\mathfrak{w}|^2 + \tfrac{3}{8}|\mathfrak{w}|^4 + \cdots\right)$$

als kinetische Energie des materiellen Punktes ansprechen.

Indem stets $dt > d\tau$ ist, könnte man den Quotienten $\frac{dt - d\tau}{d\tau}$ als das Vorgehen der Zeit gegen die Eigenzeit des materiellen Punktes bezeichnen und dann sich ausdrücken: Die kinetische Energie eines materiellen Punktes ist das Produkt seiner Masse in das Vorgehen der Zeit gegen seine Eigenzeit.

Das Quadrupel der Gleichungen (22) zeigt wieder die durch das Relativitätspostulat geforderte volle Symmetrie in x, y, z, it, wobei der vierten Gleichung, wie wir dies bereits in der Elektrodynamik analog antrafen, gleichsam eine höhere physikalische Evidenz zuzuschreiben ist. Auf Grund der Forderung dieser Symmetrie ist nach dem Muster der vierten Gleichung schon sofort das Tripel der drei ersten Gleichungen aufzubauen und im Hinblick auf diesen Umstand ist die Behauptung gerechtfertigt: Wird das Relativitätspostulat an die Spitze der Mechanik gestellt, so folgen die voll-

ständigen Bewegungsgesetze allein aus dem Satze von der Energie.

Ich möchte nicht unterlassen, noch plausibel zu machen, daß nicht von den Erscheinungen der Gravitation her ein Widerspruch gegen die Annahme des Relativitätspostulates zu erwarten ist[1]).

Ist B^* (x^*, y^*, z^*, t^*) ein fester Raum-Zeitpunkt, so soll der Bereich aller derjenigen Raum-Zeitpunkte $B\,(x, y, z, t)$, für die

$$(x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2 = (t-t^*)^2, \quad t-t^* \geqq 0 \tag{23}$$

ist, das Strahlgebilde des Raum-Zeitpunktes B^* heißen.

Von diesem Gebilde wird eine beliebig angenommene Raum-Zeitlinie stets nur in einem einzigen Raum-Zeitpunkte B geschnitten, wie einerseits aus der Konvexität des Gebildes, andererseits aus dem Umstande hervorgeht, daß alle Richtungen der Raum-Zeitlinie nur Richtungen von B^* nach der konkaven Seite des Gebildes sind. Es heiße dann B^* ein Lichtpunkt von B.

Wird in der Bedingung (23) der Punkt $B\,(x, y, z, t)$ fest, der Punkt $B^*\,(x^*, y^*, z^*, t^*)$ variabel gedacht, so stellt die nämliche Relation den Bereich aller Raum-Zeitpunkte B^* dar, die Lichtpunkte von B sind, und es zeigt sich analog, daß auf einer beliebigen Raum-Zeitlinie stets nur ein einziger Punkt B^* vorkommt, der ein Lichtpunkt von B ist.

Es möge nun ein materieller Punkt F von der Masse m bei Vorhandensein eines anderen materiellen Punktes F^* von der Masse m^* eine bewegende Kraft nach folgendem Gesetze erfahren. Stellen wir uns die Raum-Zeitfäden von F und F^* mit Hauptlinien in ihnen vor. Es sei BC ein unendlich kleines Element der Hauptlinie von F, weiter B^* der Lichtpunkt von B, C^* der Lichtpunkt von C auf der Hauptlinie von F^*, sodann OA' der zu B^*C^* parallele Radiusvektor des hyperboloidischen Grundgebildes (2), endlich D^* der Schnittpunkt der Geraden B^*C^* mit dem durch B zu ihr normal gelegten Raume. Die bewegende Kraft des Massenpunktes F im Raum-Zeitpunkte B möge nun sein derjenige zu BC normale Raum-Zeit-Vektor I. Art, der sich additiv zusammensetzt aus dem Vektor

$$m\,m^*\left(\frac{OA'}{B^*D^*}\right)^3 BD^* \tag{24}$$

in Richtung BD^* und dazu einem geeigneten Vektor

---

1) In einer ganz anderen Weise, als ich hier vorgehe, hat H. Poincaré (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129) das Newtonsche Attraktionsgesetz dem Relativitätspostulate anzupassen versucht.

in Richtung B^*C^*. Dabei ist unter OA'/B^*D^* das Verhältnis der betreffenden zwei parallelen Vektoren verstanden.

Es leuchtet ein, daß diese Festsetzung einen kovarianten Charakter in Bezug auf die Lorentzsche Gruppe trägt.

Wir fragen nun, wie sich hiernach der Raum-Zeitfaden von F verhält, falls der materielle Punkt F^* eine gleichförmige Translationsbewegung ausführt, d. h. die Hauptlinie des Fadens von F^* eine Gerade ist. Wir verlegen den Raum-Zeit-Nullpunkt O in sie und können durch eine Lorentz-Transformation diese Gerade als t-Axe einführen. Nun bedeute x, y, z, t den Punkt B und es sei τ^* die Eigenzeit des Punktes B^*, von O aus gerechnet. Unsere Festsetzung führt hier zu den Gleichungen

$$(25)\qquad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{m^* x}{(t-\tau^*)^3}, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{m^* y}{(t-\tau^*)^3}, \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\frac{m^* z}{(t-\tau^*)^3}$$

und

$$(26)\qquad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{m^*}{(t-\tau^*)^2}\,\frac{d(t-\tau^*)}{dt},$$

wobei

$$(27)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = (t-\tau^*)^2$$

und

$$(28)\qquad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1$$

ist. Die drei Gleichungen (25) lauten in Anbetracht von (27) genau wie die Gleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktes unter Anziehung eines festen Zentrums nach dem Newtonschen Gesetze, nur daß statt der Zeit t die Eigenzeit τ des materiellen Punktes tritt. Die vierte Gleichung (26) gibt sodann den Zusammenhang zwischen Eigenzeit und Zeit für den materiellen Punkt.

Es möge nun die Bahn des Raumpunktes x, y, z für die verschiedenen τ eine Ellipse mit der großen Halbaxe a, der Exzentrizität e sein und in ihr E die exzentrische Anomalie bedeuten, T den Zuwachs an Eigenzeit für einen vollen Umlauf in der Bahn, endlich $n\mathsf{T} = 2\pi$ sein, sodaß bei geeignetem Anfangspunkte von τ die Keplersche Gleichung

$$(29)\qquad n\tau = E - e \sin E$$

besteht. Verändern wir noch die Zeiteinheit und bezeichnen die Lichtgeschwindigkeit mit c, so entsteht aus (28):

$$(30)\qquad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1 = \frac{m^*}{ac^2}\,\frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}.$$

Unter Vernachlässigung von c^{-4} gegen 1 folgt dann

$$n dt = n d\tau \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^*}{a c^2} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}\right),$$

woraus mit Benutzung von (29) sich

$$(31) \qquad nt + \text{konst.} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^*}{a c^2}\right) n\tau + \frac{m^*}{a c^2} \sin E$$

ergibt. Der Faktor $\frac{m^*}{a c^2}$ hierin ist das Quadrat des Verhältnisses einer gewissen mittleren Geschwindigkeit von F in seiner Bahn zur Lichtgeschwindigkeit. Wird für m^* die Masse der Sonne, für a die halbe große Axe der Erdbahn gesetzt, so beträgt dieser Faktor 10^{-8}.

Ein Anziehungsgesetz für Massen gemäß der eben erörterten und mit dem Relavitätspostulate verbundenen Formulierung würde zugleich eine Fortpflanzung der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit bedeuten. In Anbetracht der Kleinheit des periodischen Termes in (31) dürfte eine Entscheidung gegen ein solches Gesetz und die vorgeschlagene modifizierte Mechanik zu Gunsten des Newtonschen Attraktionsgesetzes mit der Newtonschen Mechanik aus den astronomischen Beobachtungen nicht abzuleiten sein.

Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven. (Imaginäre Substitutionsgruppen).

(Voranzeige).

Mitteilung eines Grenzübergangs durch iterierendes Verfahren.

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung am 22. Februar 1908.

In meinen bisherigen Abhandlungen über die Uniformisierung algebraischer bezw. analytischer Kurven [1]) habe ich mich auf diejenigen Uniformisierungsprobleme beschränkt, welche auf reelle lineare Substitutionsgruppen führen. Die Methode, welche ich in dieser Mitteilung erläutern will, gestattet die Erledigung auch solcher Uniformisierungsprobleme, bei welchen die betreffenden linearen Substitutionsgruppen imaginär werden. Es kommen hier namentlich die von Herrn Klein Math. Annalen Bd. XIX [2]) und XXI [3]) aufgestellten, durch das Prinzip der „Ineinanderschiebung" gewonnenen Theoreme („Fundamentaltheoreme") in Betracht.

Mein Verfahren, welches ich als Grenzübergang durch iterierendes Verfahren bezeichne, will ich an dem Beispiele des von Herrn Klein Math. Annal. Bd. XIX formulierten Fundamentaltheorems auseinandersetzen.

1) Göttinger Nachrichten, 1907, Sitzungen vom 9. März, 12. Mai, 6. Juli, 23. November.

2) F. Klein: „Ueber eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich". 1882.

3) F. Klein: „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie", 1882/83.

Auf einer gegebenen Riemannschen Fläche vom Geschlecht p sind p die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte beliebig gezogen. Es handelt sich darum die aufgeschnittene Riemannsche Fläche, welche $2p$-fach zusammenhängend ist, umkehrbar eindeutig und konform auf einen (unbekannten) die Ebene einfach überdeckenden Bereich Φ derart abzubilden, daß je zwei Punkten der aufgeschnittenen Fläche, welche sich längs eines der p Rückkehrschnitte unmittelbar gegenüberliegen, zwei Randpunkte des Bereichs Φ entsprechen, die durch eine lineare Substitution auf einander bezogen erscheinen.

Daß diese Aufgabe, abgesehen von einer linearen Transformation des Bereichs Φ, nicht mehr als eine Lösung haben kann, ergibt sich mit Hülfe einer Methode, deren Grundgedanke in einem von mir auf der Naturforscherversammlung in Meran (September 1905) vorgetragenen Beweise eines spezielleren Satzes enthalten ist [1]). Daß es aber wirklich einen den Bedingungen der Aufgabe genügenden Bereich Φ gibt, ist besonders nachzuweisen.

Ich behaupte nun und werde meine Behauptung in einer demnächst in den Gött. Nachr. erscheinenden Abhandlung ausführlich begründen, daß die Lösung des genannten Problems durch folgenden Prozeß gewonnen wird.

Man bilde zunächst unter Benutzung eines in der erwähnten Arbeit (Jahresbericht 1906) von mir angegebenen Gedankens [2]) die aufgeschnittene Riemannsche Fläche umkehrbar eindeutig und konform auf einen $2p$-fach zusammenhängenden schlichten Bereich Φ_1 ab, wobei die zwischen den Randlinien von Φ_1 sich ergebende Zuordnung im allgemeinen noch nicht linear, jedenfalls aber regulär analytisch ist.

Man hat jetzt die neue Aufgabe, den schlichten Bereich Φ_1 mit analytischer Ränderzuordnung umkehrbar eindeutig und konform auf den gesuchten Bereich Φ mit linearer Ränderzuordnung derart abzubilden, daß je zwei einander zugeordneten Randpunkten des Bereichs Φ_1 zwei einander zugeordnete Randpunkte des Bereichs Φ entsprechen. Die Lösung dieser Aufgabe wird im wesentlichen durch das elliptische Integral erster Art geliefert, wenn die Anzahl p der einander zugeordneten Randlinienpaare gleich eins ist. Diese speziellere Abbildungsaufgabe spielt bei der

1) S. meine Arbeit: „Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird"; Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Jahrgang 1906, pag. 142—153.

2) S. insbesondere pag. 150—152 der Arbeit.

nunmehr vorzuführenden Lösung des allgemeinen Abbildungsproblems ($p \geqq 2$) die Rolle einer Grundaufgabe.

Es seien $L_{1,1}, L'_{1,1}, L_{2,1}, L'_{2,1}, \ldots, L_{p,1}, L'_{p,1}$ die p Paare einander entsprechender Randlinien des Bereichs Φ_1. Fassen wir das von den Linien $L_{1,1}, L'_{1,1}$ allein begrenzte zweifach zusammenhängende Gebiet in der Ebene auf, welches den Bereich Φ_1 als Teil enthält, so können wir für dieses Gebiet die Grundaufgabe lösen. Um diese Aufgabe zu einer völlig bestimmten zu machen, müssen wir noch über die drei komplexen Konstanten der linearen Transformation verfügen, welcher die bei der Lösung der Grundaufgabe sich ergebende Abbildungsfunktion unterworfen werden kann. Man kann diese Verfügung beispielsweise dadurch treffen, daß man drei Punkte im Innern des Bereichs Φ_1 markiert, welche bei der erwähnten konformen Abbildung fest bleiben sollen. Diese drei Punkte wollen wir auch bei allen folgenden Abbildungsoperationen unseres Verfahrens fest denken.

Der Bereich Φ_1 geht bei der oben angegebenen ersten Abbildungsoperation in einen Bereich Φ_2 über. Von den einander zugeordneten Begrenzungslinien des Bereichs Φ_2, welche entsprechend den Begrenzungslinien des Bereichs Φ_1 mit $L_{1,2}, L'_{1,2}, L_{2,2}, L'_{2,2}, \ldots, L_{p,2}, L'_{p,2}$ bezeichnet werden mögen, sind $L_{1,2}, L'_{1,2}$ linear auf einander bezogen, während die $p-1$ anderen Randlinienpaare jedenfalls regulär analytisch auf einander bezogen erscheinen. Wir können daher mit dem Bereich Φ_2 ebenso verfahren wie mit Φ_1, indem wir jetzt das zweite Paar Begrenzungslinien bevorzugen. Der Bereich Φ_2 geht dadurch in einen Bereich Φ_3 über, für welchen das zweite Paar der Begrenzungslinien lineare Zuordnung aufweist, sodaß also das unmittelbare Resultat der ersten Operation zerstört erscheint. Mit Φ_3 kann man jetzt ebenso verfahren wie mit Φ_2, unter Bevorzugung des dritten Randlinienpaares. Der Prozeß läßt sich offenbar in infinitum fortsetzen, indem man die Operation der Grundaufgabe etwa periodisch iterierend anwendet. Wesentlich ist übrigens nur, daß man bei der Ausübung des Verfahrens jedes der p Linienpaare unendlich oft zwecks Ausführung der Grundoperation bevorzugt, ein Umstand, welcher eine bemerkenswerte Analogie mit der méthode de balayage des Herrn Poincaré darbietet. Das Verfahren führt uns in der Grenze auf einen bestimmten Bereich

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \Phi_n,$$

welcher die verlangte Eigenschaft besitzt.

Als ein Spezialfall der hier behandelten Aufgabe kann das von Herrn Schottky in seiner bekannten Doktordissertation [1]) betrachtete Problem angesehen werden, einen von $p+1$ Linien begrenzten $(p+1)$-fach zusammenhängenden Bereich konform auf einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich abzubilden. Die in diesem Falle zu Grunde liegende geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht p gehört einem bestimmten orthosymmetrischen Typus an, welcher durch die Zahl $p+1$ der vorhandenen Symmetrielinien charakterisiert ist. Das Rückkehrschnittsystem hat man sich aus p dieser Symmetrielinien gebildet zu denken. Die Lösung der genannten Abbildungsaufgabe wurde für die Fälle $p=0$ und $p=1$ bereits von Riemann bezw. Schwarz, Schottky gegeben. Für den Fall $p=2$ habe ich auf der Naturforscherversammlung in Stuttgart (Sept. 1906) eine Lösung mitgeteilt [2]). Diese Lösung erstreckt sich überhaupt auf alle mehrfach zusammenhängenden Bereiche, welche in der Art zu sich selbst symmetrisch sind, daß sie vermöge ihrer Symmetrie in zwei zu einander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerfallen. Allgemein können wir die Lösung der Schottkyschen Aufgabe mit Hülfe des iterierenden Verfahrens nach folgender Vorschrift finden: Man bilde, wenn mit $L_1, L_2, \ldots, L_{p+1}$ die Begrenzungslinien des Bereichs bezeichnet werden, zunächst das von L_1 allein begrenzte einfach zusammenhängende Gebiet der Ebene, welches den gegebenen Bereich als Teil enthält, konform auf die Fläche eines Kreises ab, wobei der gegebene Bereich in einen neuen Bereich mit einer kreisförmigen Begrenzungslinie übergeht. Mit dem neuen Bereiche verfahre man unter Bevorzugung der zweiten Begrenzungslinie ebenso wie mit dem gegebenen u. s. f., gemäß dem oben erläuterten Prinzip [3]).

---

1) F. Schottky: „Ueber die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen". Berlin 1875. (Umgearbeitet erschienen in Crelles Journal, Bd. 83.)

S. auch B. Riemann: „Gleichgewicht der Elektrizität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Achsen;" (Fragment, veröffentlicht 1876).

2) Vgl. meine Arbeit: „Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche"; Jahresbericht der D. M. V., Jahrgang 1907, pag. 116—130.

3) Diese Methode zur allgemeinen Lösung der Schottkyschen Abbildungsaufgabe habe ich zum ersten Male im Sommer 1905 gelegentlich eines Vortrags mitgeteilt, welchen ich im Mathematischen Seminar an der Universität Berlin gehalten habe. Allerdings hatte ich damals noch nicht einen vollständigen Konvergenzbeweis.

Ein anderer nicht minder wichtiger und zugleich weitergehender Spezialfall des Kleinschen Fundamentaltheorems tritt ein, wenn die gegebene Riemannsche Fläche zu einer beliebigen reellen algebraischen Kurve mit mindestens einem reellen Zuge gehört und wenn jeder der p Rückkehrschnitte zu sich selbst symmetrisch ist und die den reellen Zügen entsprechenden Symmetrielinien der Riemannschen Fläche in zwei Punkten schneidet. Diesen Fall habe ich in der Arbeit „über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven“ besonders untersucht und gewürdigt [1]). Derselbe hat vor dem Schottkyschen Spezialfall namentlich das eine voraus, daß er nicht, wie jener, an die Vorstellung eines orthosymmetrischen Einzeltypus reeller Kurven gebunden ist, sondern gleichmäßig alle orthosymmetrischen und diasymmetrischen Typen umfaßt.

---

1) Gött. Nachr., 9. März 1907. Vgl. Fricke's Spezialtheorem für orthosymmetrische Riemannsche Flächen; Aut. Funkt., Bd. II, pag. 46 oben.

Ueber die Differentialgleichungen binärer Seminvarianten und Invarianten bei unabhängigen Substitutionen.

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Februar 1908 durch Herrn F. Klein.

Trotzdem schon Cayley bei seiner ersten Beschäftigung mit Invarianten multilineare Urformen einführte, deren Variable unabhängigen linearen Substitutionen unterworfen werden, und so den Begriff der Invarianz erweiterte, ist der Theorie der genannten Formen und ihrer invarianten Bildungen eine systematische Bearbeitung bislang noch nicht zu Teil geworden.

Im Folgenden sollen insbesondere die auf der Existenz der Differentialgleichungen der Invarianten fußenden Sätze und Methoden für beliebig viele binäre Variable kurz entwickelt werden.

Indem wir uns vorwiegend der nichthomogenen Schreibweise bedienen, sei die vorgelegte allgemeine Urform f von den resp. Ordnungen $n, p, q, \ldots$ in den Variabeln $x, y, z, \ldots$:

$$(1)\quad f_{npq\ldots}(x, y, z, \ldots) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} \ldots n_i p_k q_l \ldots a_{ikl\ldots} x^{n-i} y^{p-k} z^{q-l} \ldots,$$

wo $n_i, p_k, q_l \ldots$ resp. die $i^{\text{ten}}, k^{\text{ten}}, l^{\text{ten}} \ldots$ Binomialkoeffizienten von $n, p, q, \ldots$ bezeichnen.

Vermöge unabhängiger („inkongruenter") linearer Substitutionen, von den Determinanten $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots$, mögen die Variabeln $x, y, z, \ldots$ übergehen in neue Variable $X, Y, Z, \ldots$, die Form f in eine andere $F(X, Y, Z, \ldots)$ mit den Koeffizienten $A_{ikl\ldots}$. Dann wollen wir uns auf, in den $a_{ikl\ldots}$ ganzrationale[1]) Invarianten

1) Die meisten der folgenden Entwickelungen sind indessen bei geeigneter Modifikation von dieser Annahme unabhängig.

$J(a)$ beschränken, die der Identität genügen:

$$\text{(I)} \qquad J(A) \equiv \Delta_x^{w_x} \Delta_y^{w_y} \Delta_z^{w_z} \ldots J(a),$$

wo die Exponenten w_x, w_y, w_z — die „Teil-Gewichte" von J bezüglich der einzelnen Variabeln — feste natürliche Zahlen seien.

Jede der unabhängigen Substitutionen von $x, y, z, \ldots$ läßt sich aus vier Fundamentalsubstitutionen zusammensetzen, aus zwei „Schiebungen" und zwei „Streckungen". Es werde z. B. auf x die Schiebung ausgeübt:

$$\text{(2)} \qquad x = X + h;$$

andererseits, wenn man homogen setzt $x = \frac{x_1}{x_2}$, $X = \frac{X_1}{X_2}$, auf x_2 die Schiebung:

$$\text{(3)} \qquad x_1 = X_1, \quad x_2 = h' X_1 + X_2.$$

Entsprechend erleide x eine Streckung:

$$\text{(4)} \qquad x = m X;$$

andererseits die homogenisierende Variable x_2 die Streckung:

$$\text{(5)} \qquad x_1 = X_1, \quad x_2 = m' X_2.$$

Entwickelt man, wie im Falle einer einzigen Variabeln, nach Ausführung der Schiebung (2) $J(A)$ in eine Maclaurinsche Reihe nach steigenden Potenzen von h, so müssen, da gemäß (I) $J(A) = J(a)$ sein soll, die Koeffizienten aller Potenzen von h verschwinden, insonderheit also der von h selbst. Analog verfahre man mit der Schiebung (3). Dann genügt die Invariante J bezüglich der ersten Variabeln x den beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \nabla_x \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \cdots i\, a_{i-1, kl \ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl \ldots}} = 0, \\ \nabla_x' \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \cdots (n-i)\, a_{i+1, kl \ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl \ldots}} = 0, \end{cases}$$

und bezüglich jeder weiteren Variabeln $y, z, \ldots$ zwei Gleichungen analoger Struktur.

Nach Ausführung einer Streckung (4) soll gemäß (I) $J(A) \equiv m^{w_x} J(a)$ werden. Man setze $m = 1 + \varepsilon$, entwickle nunmehr beide Seiten der letzten Identität nach Potenzen von ε. Dann liefert die Uebereinstimmung der beiden Koeffizienten der ersten Potenz von ε eine weitere lineare partielle Differentialgleichung, und dieser Prozeß wiederholt sich im Wesentlichen bei der Streckung (5). Somit genügt J bezüglich der ersten Variabeln x

auch noch den beiden Gleichungen:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} M_x \equiv \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \cdots (n-i)\, a_{ikl\ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{i+1,kl\ldots}} - w_x J = 0, \\ M_x' \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{p} \sum\limits_{l=0}^{q} \cdots i\, a_{ikl\ldots} \dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} - w_x J = 0, \end{cases}$$

und analog für die weiteren Variabeln $y, z, \ldots$

Die Bedingungen (III) lassen sich auch durch rein arithmetische ersetzen. Die Invariante $J(a)$ ist nach Voraussetzung ein Aggregat von der Gestalt:

$$(6) \qquad J(a) = \sum c a_{ikl\ldots}^{\varepsilon_{ikl\ldots}},$$

wo die Exponenten $\varepsilon_{ikl\ldots}$ natürliche Zahlen (incl. 0) sind, die c numerische Faktoren. Führt man rechts direkt die vermöge einer Streckung (4) resp. (5) hervorgehenden neuen Koeffizienten $A_{ikl\ldots}$ ein, so ergeben sich durch Vergleichung die beiden, mit (III) gleichwertigen Relationen:

$$\text{(III')} \quad \begin{cases} \sum\limits_{kl\ldots} \varepsilon_{1kl\ldots} + 2 \sum\limits_{kl\ldots} \varepsilon_{2kl\ldots} + \cdots + n \sum\limits_{kl\ldots} \varepsilon_{nkl\ldots} = w_x, \\ \sum\limits_{kl\ldots} \varepsilon_{n-1,kl\ldots} + 2 \sum\limits_{kl\ldots} \varepsilon_{n-2,kl\ldots} + \cdots + n \sum\limits_{kl\ldots} \varepsilon_{0kl\ldots} = w_x, \end{cases}$$

und analog die dem zweiten, dritten, ... Index korrespondierenden. Man nennt, in Uebereinstimmung mit der obigen Bezeichnung, die linken Seiten von (III') die „Teilgewichte" von J bezüglich der Variabeln x resp. ihrer homogenisierenden x_1, und J „isobar" hinsichtlich beider, u. s. f.

Durch Addition der beiden Gleichungen (III), oder auch (III'), ergibt sich, daß J bezüglich aller Koeffizienten $a_{ikl\ldots}$ von f homogen ist von einer Dimension d, wo:

$$(7) \qquad d = \frac{2w_x}{n} = \frac{2w_y}{p} = \frac{2w_z}{q} = \ldots$$

Umgekehrt, und das ist das Bequemere, sagen die Bedingungen (III), oder auch (III'), nebst den zugehörigen, aus, daß J in den $a_{ikl\ldots}$ homogen ist, von einer Dimension d, und bezüglich der einzelnen Variabeln x, y, z, (oder auch bezüglich der einzelnen Indizes) „isobar" ist von den Teilgewichten $w_x, w_y, w_z, \ldots$, wo diese mit d durch die Relationen (7) verknüpft sind.

Die Substitutionen (2), (3), (4), (5) bilden je für sich eine Gruppe, und aus der Lie'schen Theorie der infinitesimalen Substitutionen einer Gruppe folgt, daß die vier Bedingungen (II), (III) auch hinreichend sind, damit J eine Invariante von f gegenüber

einer beliebigen linearen Substitution von x ist, und entsprechend für $y, z, \ldots$

Unter einer **Seminvariante** φ von f verstehe man eine ganzrationale Funktion der a, homogen von einer Dimension d, und isobar von bezüglichen Teilgewichten $w_x, w_y, w_z, \ldots$, die nur den an erster Stelle in (II) aufgeführten Differentialgleichungen $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0, \ldots$ genügt, sich also gegenüber den Schiebungen der $x, y, z, \ldots$ von Charakter (2) (absolut) invariant verhält.

Es sollen die einfachsten Seminvarianten von f aufgestellt werden, durch die sich alle übrigen rational darstellen lassen.

Gemäß der Definition (II) der Prozesse $\nabla_x, \nabla_y, \ldots$ hat man:

$$(8)\qquad \nabla_x a_{ikl\ldots} = i a_{i-1,\,kl\ldots}, \quad \nabla_y a_{ikl\ldots} = k a_{i,\,k-1,\,l\ldots}, \quad \text{u. s. f.}$$

Die Urform f (1) gebe vermöge der Schiebungen (2) $x = X+h$, $y = Y+k, \ldots$, mit den Parametern $h, k, l, \ldots$ über in $F(X, Y, Z, \ldots)$:

$$(9)\quad F(X, Y, Z\ldots) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \sum_{t=0}^{q} \cdots A_{rst\ldots}\, n_r p_s q_t \ldots X^{n-r} Y^{p-s} Z^{q-t} \ldots,$$

wo:

$$(10)\qquad A_{rst\ldots} = \sum_{\varrho=0}^{r} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\tau=0}^{t} \cdots r_\varrho s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} h^{r-\varrho} k^{s-\sigma} l^{t-\tau} \ldots$$

Man schreibe bequemer:

$$(11)\quad a_{000\ldots} = a_0; \quad a_{1000\ldots} = a_1, \quad a_{0100\ldots} = b_1, \quad a_{0010\ldots} = c_1, \ldots,$$

und entsprechend in großen Buchstaben, so ist $A_1 = a_0 h + a_1$, $B_1 = a_0 k + b_1$, u. s. f. Dann ergibt sich durch Bildung von $\nabla_x A_1$, $\nabla_y A_1, \ldots$, $\nabla_x B_1, \ldots$, daß das System der Bedingungen $\nabla_x A_1 = 0$, $\nabla_y A_1 = 0, \ldots$, $\nabla_x B_1 = 0, \ldots$ **gleichwertig** ist mit dem andern:

$$(12)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_x h \equiv \nabla_y h \equiv \nabla_z l \equiv \ldots = -1, \\ \nabla_y h \equiv \nabla_z h \equiv \ldots \nabla_x k \equiv \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Nimmt man diese Bedingungen als **erfüllt** an, und übt etwa den Prozeß ∇_x auf $A_{rst\ldots}$ (10) aus, so gehen aus jedem Terme von $A_{rst\ldots}$ zwei neue Terme hervor, die sich aber gegen zwei anderweitige, entgegengesetzt gleiche Terme zerstören. Damit gilt:

Satz I. „**Hat man die Schiebungsparameter** $h, k, l, \ldots$ **in (2) gemäß (12) so gewählt, daß die Koeffizienten** $A_1, B_1, C_1, \ldots$ **in (9) den Bedingungen** $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0, \ldots$ **genügen, so ist das auch mit sämtlichen Koeffizienten** $A_{rst\ldots}$ **von (9) der Fall**".

Für das Folgende genügt die Kenntnis der partikulären[1])

1) Ein vollständiges System unabhängiger Lösungen von (12) gewinnt man, wenn man die Werte (13) vermöge willkürlicher Konstanten mit den einzelnen Größen C (IV) additiv zusammensetzt.

Lösungen von (12):

$$h = -\frac{a_1}{a_0}, \quad k = -\frac{b_1}{b_0}, \quad l = -\frac{c_1}{c_0}, \cdots \tag{13}$$

Substituiert man diese Werte in (10), und multipliziert mit $a_0^{r+s+t+\cdots-1}$ herauf, so erhält man eine Form der a:

$$\underset{(r+s+t+\cdots\geqq 2)}{C_{rst\ldots}} = a_0^{r+s+t+\cdots-1} A_{rst\ldots} \tag{IV}$$
$$= \sum (-1)^{(r+s+t+\cdots)-(\varrho+\sigma+\tau+\cdots)} r_\varrho s_\sigma t_\tau \ldots a_{\varrho\sigma\tau\ldots} a_0^{\varrho+\sigma+\tau+\cdots-1} a_1^{r-\varrho} b_1^{s-\sigma} c_1^{t-\tau} \ldots,$$

die in den a homogen ist von der Dimension $r+s+t+\ldots$, und hinsichtlich der einzelnen Indizes isobar von den Teilgewichten $r, s, t, \ldots$ Da diese Größen C, incl. C_0 so angeordnet werden können, daß je eine immer einen neuen Koeffizienten a mit sich führt, so sind sie von einander unabhängig. Sie genügen den Bedingungen $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0, \ldots$, und wenn μ die Anzahl der Variabeln $x, y, z, \ldots$ in f (1) angibt, so beträgt die Anzahl der C (incl. C_0) $(n+1)(p+1)(q+1)\cdots-\mu$.

Durch die C läßt sich jede weitere Seminvariante φ von f sofort (rational) darstellen, denn nach der Definition einer Seminvariante und auf Grund des Zusammenhanges (IV) zwischen den C und A erhält man:

$$\varphi(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots;\ a_{rst\ldots}\ldots) = \varphi\left(C_0, 0, 0, 0, \cdots;\ \frac{C_{rst\ldots}}{C_0^{r+s+t+\cdots-1}}, \cdots\right). \tag{V}$$

Nun beweist man mit Hilfe der für Urformen $f(x)$ mit einer einzigen Variabeln x üblichen Methoden den:

Satz II. „Jede Seminvariante φ von $f(1)$ ist das Leitglied einer völlig bestimmten Kovariante Φ von f; jede Syzygie zwischen Leitgliedern φ besteht zugleich zwischen den zugehörigen Kovarianten Φ, und umgekehrt".

Somit sind die $C_{rst\ldots}$, incl. $C_0 = a_0$ — die „fundamentalen Seminvarianten" von f — die Leitglieder von ebensovielen unabhängigen Kovarianten $\psi_{rst\ldots}$ — den „assoziierten Formen (Schwesterformen)" von f —, und es gilt der grundlegende

Satz III. „Eine binäre Urform $f_{npq\ldots}\ldots(x, y, z, \ldots)$ in μ Variabeln besitzt $(n+1)(p+1)(q+1)\cdots-\mu$ unabhängige Seminvarianten, die durch die Größen $C_{rst\ldots}$ (IV) incl. $C_0 = a_0$ repräsentiert werden. Jede Seminvariante oder Invariante von f ist, gemäß (V), abgesehen von einer natürlichen Potenz von $C_0 = a_0$ im Nenner, ganzrational durch die C darstellbar. Die C stimmen, je-

weils bis auf eine Potenz von $C_0 = a_0$, überein mit den Koeffizienten $A_{rst\ldots}$ der vermöge der Schiebungen (2), (3) transformierten Form f, für die die Koeffizienten A_1, B_1, C_1, ... der Potenzprodukte zweithöchster Dimension verschwinden. Die C sind die Leitglieder von ebensoviel unabhängigen Kovarianten ψ, den assoziierten Formen: durch sie ist, wiederum auf Grund von (V), bis auf eine Potenz von f im Nenner, jede Kovariante oder Invariante von f ganzrational ausdrückbar."

Das Auftreten der negativen Vorzeichen in (13), verbunden mit dem Auftreten der Binomialkoeffizienten in (1), resp. (9), (10), hat zur Folge, daß die algebraische Summe der numerischen Koeffizienten einer Seminvariante oder Invariante von f verschwindet.

Nach dem Vorgange von F. Junker[1]) für den Fall einer einzigen Variabeln x sollen die fundamentalen Seminvarianten C statt der a in die Differentialgleichungen (II), (III) für eine Invariante J von f als unabhängige Variable eingeführt werden; die Gleichungen $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0, \ldots$ werden dabei von selbst überflüssig (d. i. identisch erfüllt).

Man führt die C statt der a in J dadurch ein (gemäß (IV)), daß man $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$, $a_0 = C_0$ nimmt, und alle weiteren $a_{rst\ldots}$ durch die $\dfrac{C_{rst\ldots}}{C_0^{r+s+t+\cdots-1}}$ ersetzt.

Aus (IV) folgert man die Formeln für die partiellen Ableitungen der C nach den a (für $a_1, b_1, c_1 = \ldots = 0$):

$$(14)\begin{cases} \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_1} = 0, \quad \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial b_1} = 0, \ldots (r+s+t+\cdots = 2), \\ \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_1} = -r\, C_{r-1,s\ldots}, \quad \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial b_1} = -s\, C_{r,s-1,t\ldots}, \ldots (r+s+t+\cdots > 2); \end{cases}$$

$$(15)\begin{cases} \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_{rst\ldots}} = C_0^{r+s+t+\cdots-1}, \\ \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_{\varrho\sigma\tau\ldots}} = 0\ (\varrho+\sigma+\tau+\cdots = r+s+t+\cdots), \\ \dfrac{\partial C_{rst\ldots}}{\partial a_{\varrho\sigma\tau\ldots}} = 0\ (\varrho+\sigma+\tau+\cdots < r+s+t+\cdots). \end{cases}$$

In der zweiten Formel (15) ist unter $\varrho, \sigma, \tau \ldots$ eine von $r, s, t \ldots$ verschiedene Kombination der Indizes zu verstehen.

1) Math. Annalen, Bd. 64 (1907), p. 328; vgl. auch die voraufgehenden Noten in den Württemb. math. naturw. Mitteilungen (2) 7 (1905), p. 52; (2) 8 (1906), p. 8.

Auf Grund von (14), (15) gehen zunächst die Gleichungen (III), wenn die Zeichen $C_{1000\ldots}$, $C_{0100\ldots}$, $C_{00100\ldots}$, ... sämtlich die Null bedeuten, über in Gleichungen derselben Struktur; z. B. die beiden ersten in:

$$(\mathrm{III}'')\quad \begin{cases} M_x \equiv \sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{p}\sum\limits_{l=0}^{q}\cdots(n-i)\,C_{ikl\ldots}\dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} - w_x J = 0, \\ M'_x \equiv \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{p}\sum\limits_{l=0}^{q}\cdots\quad i\,C_{ikl\ldots}\dfrac{\partial J}{\partial a_{ikl\ldots}} - w_x J = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Geht man nunmehr zu den Gleichungen (II) $\nabla_x = 0, \nabla_y = 0, \ldots$ über, so besitzt in der ersten $\dfrac{\partial J}{\partial a_1}$ den Faktor $(n-1)\,n_{2000\ldots}$, während die $\dfrac{\partial J}{\partial b_1}$, $\dfrac{\partial J}{\partial c_1}\cdots$ resp. mit den Faktoren $na_{11000\ldots}$, $na_{10100\ldots}$, $na_{100100\ldots}$, ... behaftet sind. Mit Rücksicht hierauf und auf die erste Reihe der Formeln (14) spielen in den transformierten Gleichungen $\nabla_x = 0, \nabla_y = 0, \ldots$ die Glieder mit der Indizessumme Zwei eine andere Rolle, als die von höherer Indizessumme. Man erhält:

$$(\mathrm{II}')\qquad \nabla_x \equiv \sum_{(i+k+l+\cdots \geqq 2)}(n-i)\,C_{i+1,kl\ldots}\frac{\partial J}{\partial C_{ikl\ldots}}$$

$$-\sum_{(i+k+l+\cdots > 2)}\frac{\partial J}{\partial C_{ikl\ldots}}\big\{i(n-1)\,C_{2000\ldots}\,C_{i+1,kl\ldots} + kn\,C_{11000\ldots}\,C_{i,k-1,l\ldots} + ln\,C_{10100\ldots}\,C_{ik,l-1,\ldots} + \cdots\big\} = 0$$

und entsprechend $\nabla_y = 0, \ldots$

Die Bedingungen (III″) lassen sich wiederum durch arithmetische Dimensions- und Gewichtseigenschaften hinsichtlich der C ersetzen; hierbei ist zugleich zu betonen, daß der in dem jeweils ersten Gliede der Gleichungen $M_x = 0$, $M_y = 0, \ldots$ auftretenden Größe C_0 ein a n d e r e r Sinn beizulegen ist, als bisher, wo sie die Bedeutung von a_0 hatte.

Sei der Ausdruck $J(6)$, in Funktion der alten Koeffizienten von f, jetzt genauer geschrieben:

$$(6')\quad J(a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_{rst\ldots}, \ldots) = \sum c\, a_0^{\varepsilon_0} a_1^{\varepsilon_1} b_1^{\eta_1} c_1^{\zeta_1} \cdots a_{rst\ldots}^{\varepsilon_{rst\ldots}}, \ldots,$$

mit den Bedingungen, gemäß (III):

$$\begin{cases} (16\,\mathrm{a})\quad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \eta_1 + \zeta_1 + \cdots + \sum \varepsilon_{rst\ldots} = d, \\ (16\,\mathrm{b})\quad \varepsilon_1 + \sum r\,\varepsilon_{rst\ldots} = w_x,\ \eta_1 + \sum s\,\varepsilon_{rst\ldots} = w_y, \ldots, \\ (16\,\mathrm{c})\quad d = \dfrac{2w_x}{n} = \dfrac{2w_y}{p} = \ldots \end{cases}$$

Nennt man $W = w_s + w_v + \cdots$ das Gesamtgewicht von J, $N = n + p + q + \cdots$ die Gesamtordnung von f, so liefert die Addition der Gleichungen (16c):

$$d = \frac{2W}{N}. \tag{17}$$

Führt man nunmehr nach der oben angegebenen Regel die fundamentalen Seminvarianten C statt der a in J ein, so wird J von der Gestalt:

$$J(C_0, C_{rst\ldots}, C_{r_1 s_1 t_1 \ldots}, C_{r_2 s_2 t_2 \ldots}, \ldots) \tag{18}$$

$$= \sum c \frac{C_{rst\ldots}^{\varepsilon_{rst\ldots}} C_{r_1 s_1 t_1\ldots}^{\varepsilon_{r_1 s_1 t_1\ldots}} C_{r_2 s_2 t_2\ldots}^{\varepsilon_{r_2 s_2 t_2\ldots}} \cdots}{C_0^{\Sigma(r+s+t+\cdots-1)\varepsilon_{rst\ldots} - \varepsilon_0}},$$

mit den Bedingungen:

$$\varepsilon_0 + \sum \varepsilon_{rst\ldots} = d, \tag{16a'}$$

$$\sum r\, \varepsilon_{rst\ldots} = w_s, \quad \sum s\, \varepsilon_{rst\ldots} = w_v, \ldots; \tag{16b'}$$

nebst (16c) $\{$und (17)$\}$. Hieraus ergibt sich aber, daß der Exponent von C_0 im Nenner von (18) einen k o n s t a n t e n Wert hat, nemlich $W - d$. Dann sagen die Gleichungen (III), und somit auch (III″) aus, daß der Zähler von J (18) wiederum hinsichtlich der einzelnen Indizes isobar ist von den Teilgewichten w_s, w_v, …, andererseits zwar nicht homogen in den $C_{rst\ldots}$ (excl. C_0), aber von Gesamtordnung d. Führt man rückwärts wieder die a ein, so sondert sich aus dem Zähler von J der Faktor $C_0^{W-d} = a_0^{W-d}$ von selbst ab, und hebt sich gegen den Nenner weg.

Addiert man dagegen je zwei zusammengehörige der Gleichungen (III″), so würde sich zufolge des Eulerschen Satzes ergeben, daß J in den C_0, $C_{rst\ldots}$ homogen wäre von einer Dimension $d = \frac{2w_s}{n} = \frac{2w_v}{p} = \ldots$ Behufs Lösung des so entstehenden Widerspruchs beachte man, daß bei Aufstellung der jeweils ersten Gleichungen (III″) stillschweigend vorausgesetzt ist, daß die als unabhängige Variable der Differentialgleichungen auftretenden C_0, $C_{rst\ldots}$ auch in dem Sinne unabhängig sind, daß nicht etwa die $C_{rst\ldots}$ Funktionen von C_0 sind. Tatsächlich geht aber $C_0 = a_0$ in die Ausdrücke der $C_{rst\ldots}$ ein, und wollte man diesen Umstand bei der Transformation der Gleichungen $M_s = 0$, $M_v = 0\ldots$ explizite berücksichtigen, so würden jene Gleichungen nicht nur wesentlich verwickelter ausfallen, sondern überhaupt einen ganz andern Charakter annehmen.

Der Sachverhalt klärt sich nun einfach dahin auf, daß die im

ersten Gliede der Gleichungen (III″) $M_s = 0$, $M_y = 0, \ldots$ auftretende Größe C_0 gar nicht die Größe a_0 selbst bedeutet, sondern lediglich eine (damit natürlich von den $C_{rs\ldots}$ unabhängige) homogenisierende Variable, die man besser hinterher wieder gleich der Einheit nimmt. Führt man rückwärts wieder die a ein, so schreibt man zweckmäßig zuvörderst auch diese nichthomogen ($a_0 = 1$), und macht erst hinterher wieder mit a_0 homogen.

Man nehme nunmehr die Bedingungen (III″) für einen Ausdruck J, in Funktion der C, bereits als erfüllt an, so hat man den weiteren grundlegenden Satz:

Satz IV. „Sei J eine in den fundamentalen Seminvarianten $C_{rs\ldots}$ (excl. $C_0 = a_0$) der Urform f nichthomogene ganzrationale Funktion von der Gesamtordnung d, und hinsichtlich der einzelnen Indizes isobar von den Teilgewichten $w_x, w_y, w_z, \ldots$, so, daß die Beziehungen (16c) erfüllt sind, so ist, damit J zu einer Invariante von f wird, notwendig und hinreichend, daß J den Bedingungen (II′) $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0, \ldots$ genügt."

Die Differentialgleichungen (II′) dürfen demnach als die Differentialgleichungen der Invarianten von f bezeichnet werden. Diese Gleichungen (II′) sind ihrer Natur nach von einander unabhängig; es sind μ homogene lineare partielle Differentialgleichungen in den $(n+1)(p+1)(q+1)\ldots - \mu - 1$ unabhängigen Variabeln $C_{rs\ldots}$ (excl. C_0). Mit Hilfe eines bekannten Satzes aus der Theorie solcher Gleichungen gilt daher:

Satz V. „Eine binäre Urform $f_{npq\ldots}(x, y, z, \ldots)$ von den Ordnungen $n, p, q, \ldots$ in den μ nichthomogenen Variabeln $x, y, z, \ldots$ besitzt $(n+1)(p+1)(q+1)\cdots - 2\mu - 1$ unabhängige Invarianten, Partikularlösungen der Gleichungen (II′) $\nabla_x = 0$, $\nabla_y = 0, \ldots$, durch die jede weitere Invariante von f ausdrückbar ist."

Die in Rede stehenden Partikularlösungen von (II′) können nach bekannter Methode, vermöge Reduktion auf ein System totaler Differentialgleichungen, ermittelt werden.

Das oben für Invarianten J von f eingeschlagene Verfahren ist mit einigen Abänderungen auf Kovarianten K von f übertragbar.

Man schreibe die Variabeln in f, wie in K, zweckmäßig homogen, sodaß K als Funktion der $a_0, a_1, b_1, c_1, \ldots, a_{rs\ldots}, \ldots; x_1, x_2; y_1, y_2; \ldots$ erscheint. Die Schiebungen (2) lauten dann, nach Einsetzung der

Werte $h = -\frac{a_1}{a_0}$, $k = -\frac{b_1}{a_0}, \ldots$ aus (13):

$$(2') \quad x_1 = X_1 - \frac{a_1}{a_0} X_2,\ x_2 = X_2;\ \ y_1 = Y_1 - \frac{b_1}{a_0} Y_2,\ y_2 = Y_2;\ \ldots$$

Um K in den neuen Argumenten $C_0, C_{rst\ldots}, \ldots; \xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \ldots$ auszudrücken, hat man wiederum $a_0 = C_0 (= 1)$, $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots = 0$, $a_{rst\ldots} = C_{rst\ldots} . C_0^{-(r+s+t+\ldots-1)}$ zu setzen, und überdies, gemäß (2′) für $a_1 = b_1 = c_1 = \ldots 0$, $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$; $y_1 = Y_1$, $y_2 = Y_2$; ... Bedeuten $\nabla_{x_1}, \nabla_{x_2}, \ldots, M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots$ die in (II), (III) mit $\nabla_x, \nabla_{x'}, \ldots, M_x, M_{x'}, \ldots$ bezeichneten Prozesse, so sind die für eine Kovariante K charakteristischen Bedingungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(VI)}\quad \nabla_{x_1} K - x_2 \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0,\ \nabla_{x_2} K - x_1 \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{(VII)}\quad M_{x_1} K - x_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} = 0,\ M_{x_2} K - x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} = 0, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Um das System (VII) in den neuen Argumenten darzustellen, hat man nur direkt $x_1 \frac{\partial K}{\partial x_1} = X_1 \frac{\partial K}{\partial X_1}$, $x_2 \frac{\partial K}{\partial x_2} = X_2 \frac{\partial K}{\partial X_2}, \ldots$ zu setzen, während die Prozesse $M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots$ genau die unter (III′) angegebenen Umformungen (mit K statt J) erleiden.

Von den Bedingungen (VI) wird wiederum jeweils die erste nach Einführung der neuen Argumente identisch erfüllt. Bei den an zweiter Stelle in (VI) stehenden Gleichungen ist zunächst $x_1 \frac{\partial K}{\partial x_2}$ durch $X_1 \frac{\partial K}{\partial X_2}$, $y_1 \frac{\partial K}{\partial y_2}$ durch $Y_1 \frac{\partial K}{\partial Y_2}, \ldots$ zu ersetzen; sodann aber die in (II′) ausgeführte Transformation von $\nabla_{x_2}, \nabla_{y_2}, \ldots$ dahin zu ergänzen, daß bei Bildung der Ableitungen $\frac{\partial K}{\partial a_1}$, $\frac{\partial K}{\partial b_1}, \ldots$ auf Grund von (2′) die Terme

$$\frac{\partial K}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} = \frac{\partial K}{\partial X_1} X_2,\ \ \frac{\partial K}{\partial Y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial b_1} = \frac{\partial K}{\partial Y_1} Y_2, \ldots$$

hinzutreten, die dann noch mit den Faktoren $(n-1) C_{2000\ldots} . n C_{1100\ldots}$, $n C_{1010\ldots}, \ldots$ zu versehen sind. Damit gehen aber die Differentialgleichungen (VI) über in:

$$\text{(VI′)}\ (n-1) C_{2000\ldots} X_2 \frac{\partial K}{\partial X_1} + n C_{1100\ldots} Y_2 \frac{\partial K}{\partial Y_1} + n C_{1010\ldots} Z_2 \frac{\partial K}{\partial Z_1} + \cdots$$
$$+ \nabla_{x_2} K - X_1 \frac{\partial K}{\partial X_2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo für $\nabla_{x_2} K, \ldots$ die in (II′) (mit K statt J) angegebenen Ausdrücke zu substituieren sind.

Nimmt man, analog dem Vorgehen bei Invarianten, die durch die Bedingungen (VII) resp. (VII′) indizierten Dimensions- und Gewichtseigenschaften für einen Ausdruck K als erfüllt an, so sind die Bedingungen (VI′) als die einzig wesentlichen für die Existenz einer Kovariante K anzusehen, und verdienen daher den Namen „Differentialgleichungen der Kovarianten von f“.

Da die Anzahl der unabhängigen Variabeln dieser Gleichungen gegenüber (II′) um 2μ zugenommen hat, nemlich um die Anzahl der X_1, X_2 Y_1, $Y_2, \ldots$, so besitzt das System (VI′) gerade $(n+1)(p+1)(q+1)\cdots - \mu$ unabhängige Partikularlösungen, die Repräsentanten der $(n+1)(p+1)(q+1)\cdots - \mu$ unabhängigen Kovarianten von f, da diese homogen in den einzelnen Variabelnreihen angenommen werden. Diese Anzahl ist, analog wie im Falle eines einzigen Variabelnpaares x_1, x_2, um μ Einheiten geringer, als die Anzahl der Koeffizienten in der Urform f.

K. Schwarzschild, Ueber die Bestimmung von Vertex und Apex nach der Ellipsoidhypothese aus einer geringen Anzahl beobachteter Eigenbewegungen. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

H. Wagner, Ergebnisse der Arbeiten des geophysikalischen Samoa-Observatoriums der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

I. Das Samoa-Observatorium von H. Wagner, O. Tetens und F. Linke.

II. Die meteorologischen Registrierungen der Jahre 1902—1906 bearbeitet von O. Tetens und F. Linke, vorgelegt von E. Wiechert.

III. Die Brandungsbewegungen des Erdbodens und ein Versuch ihrer Verwendung in der praktischen Meteorologie von F. Linke, vorgelegt von E. Wiechert.

Leo Meyer, Zu Tacitus de origine et situ Germanorum. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

W. Meyer, Lateinische Rythmik und Byzantinische Strophik. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung in Berlin.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

Mathematisch-physikalische Klasse. Neue Folge.

I. Bd. No. 1. **Koenen, A. v.**, *Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun.* Mit 4 Tafeln. 4. (48 S.) 1897. 5 M.

Nachtrag dazu. 4. (S. 49—65 mit Tafeln V—VII.) 1898. 3 M.

I. Bd. No. 2. **Brendel, Martin**, *Theorie der kleinen Planeten.* Erster Teil. 4. (171 S.) 1898. 16 M.

I. Bd. No. 3. **Schur, W.**, *Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 61/17 (Beobachter: Schur, Ambronn u. Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).* Mit 3 Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente. 4. (26 S.) 1898. 3 M.

I. Bd. No. 4. **Schur, W.**, *Vermessung der beiden Sternhaufen h und χ Persei mit dem sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumentaluntersuchungen.* Mit einer Sternkarte. 4. (88 S.) 1900. 9 M.

II. Bd. No. 1. **Wiechert, E.**, *Theorie der automatischen Seismographen.* 4. (128 S.) 1903. 8 M.

II. Bd. No. 2. **Kramer, Julius**, *Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Hecuba Typus.* 4. (153 S.) 1902. 15 M.

II. Bd. No. 3. **Furtwängler, Ph.**, *Ueber das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.* 4. 82 S.) 1902. 6 M.

II. Bd. No. 4. **Prasad, G.**, *Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat.* 4. (68 S.) 1903. 6 M.

III. Bd. No. 1. **Ehlers, E.**, *Neuseeländische Anneliden.* Mit 9 Tafeln. 4. (79 S.) 1904. 10 M.

III. Bd. No. 2. **Koenen, A. v.**, *Ueber die Untere Kreide Helgolands und ihre Ammonitiden.* Mit 4 Tafeln. 4. (63 S.) 1904. 4 M.

III. Bd. No. 3. **Schur u. Ambronn**, *Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsoldschen 6zöll. Heliometer der Sternwarte zu Göttingen.* 4. (126 S. u. 2 Taf.) 1905. 12 M.

III. Bd. No. 4. **Brendel, M.**, *Theorie des Mondes.* 4. (97 S.) 1905. 7 M.

III. Bd. No. 5. **Linke, F.**, *Luftelektrische Messungen bei 12 Ballonfahrten.* Mit 4 Tafeln 4. (30 S.) 1904. 6 M.

IV. Bd. No. 1. **Schwarzschild, K.**, *Untersuchungen zur geometrischen Optik.* I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs. Mit 6 Fig. 4. (31 S.) 1905. 2 M.

IV. Bd. No. 2. **Schwarzschild, K.**, *Untersuchungen zur geometrischen Optik.* II. Theorie der Spiegeltelescope. Mit 9 Fig. 4. (28 S.) 1905. 2 M.

IV. Bd. No. 3. **Schwarzschild, K.**, *Untersuchungen zur geometrischen Optik.* III. Ueber die astrophotographischen Objektive. Mit 10 Fig. 4. (54 S.) 1905. 4 M.

IV. Bd. No. 4. **Verworn, M.**, *Die archaeolithische Cultur in den Hipparionschichten von Aurillac (Cantal).* Mit 5 Taf. 4. (56 S.) 1905. 4 M. 50 Pf.

IV. Bd. No. 5. **Meyermann, B.**, *Vermessung der Umgebung des Orionnebels.* 4. (47 S.) 1906. 3 M. 50 Pf.

V. Bd. No. 1. **Kohlschütter, E.**, *Ergebnisse der Ostafrikanischen Pendelexpedition v. J. 1899 u. 1900.* Mit 16 Tafeln u. 8 Figuren im Text. 4. (VIII u. 229 S.) 1907. 26 M.

V. Bd. No. 2. **Schwarzschild, K.**, *Ueber die totale Sonnenfinsternis vom 30. August 1905.* Mit 5 Tafeln. 4. (73 S.) 1907. 6 M.

V. Bd. No. 3. **Kramer, J.**, *Theorie der kleinen Planeten vom Hekubatypus.* 4. (154 S.) 1907. 14 M.

V. Bd. No. 4. **Ehlers, E.**, *Neuseeländische Anneliden. II.* Mit 16 Figuren. 4. (31 S.) 1907. 2 M.

V. Bd. No. 5. **Gerdien. H.**, *Untersuchungen über die atmosphärischen radioaktiven Induktionen.* Mit 4 Tafeln. 4. (74 S.) 1907. 7 M.

Für die Redaktion verantwortlich: E. Ehlers, i.V., d. Z. vorsitzender Sekretär d. Kgl. Ges. d. Wiss.
Ausgegeben am 5. April 1908.
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1908. Heft 2.

Inhalt:

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1908.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 9. Mai 1908.

Jahresberichte.

Gedächtnisreden der Herren

J. Wackernagel auf F. Kielhorn,

A. v. Koenen auf C. Klein,

W. Voigt auf Lord Kelvin,

F. Leo auf F. Bücheler.

(Die Berichte und Reden erscheinen in den Geschäftlichen Mitteilungen Heft 1.)

Ordentliche Sitzung am 16. Mai 1908.

E. Ehlers legt vor: O. Bütschli (corr. Mitglied), Untersuchungen über organische Kalkgebilde, sowie Bemerkungen über organische Kieselgebilde. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

F. Klein legt vor: W. Ihlenburg, Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Kreisbogenvierecke. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: E. Hilb, Neue Entwicklungen über lineare Differentialgleichungen. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: Mathematische Encyklopädie VI 2, 2.

C. Runge legt vor: W. Ritz, Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

H. Minkowski legt im Namen von D. Hilbert vor: E. E. Levi, Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

E. Schwartz legt vor: R. Schneider, Griechische Poliorketiker. II. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

Derselbe berichtet über A. Schultens Ausgrabungen in Numantia.

F. Leo legt vor: Philumeni de venenatis animalibus eorumque remediis edidit M. Wellmann. (Corpus medicorum graecorum auspiciis academiarum associatarum ediderunt academiae Berolinensis Havniensis Lipsiensis, X 1, 1.)

Ordentliche Sitzung am 30. Mai 1908.

E. Schwartz, Zur Geschichte des Athanasius. VII. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

R. Pietschmann legt Berichte von Prof. Borchardt in Kairo über Ausgrabungen in Aegypten vor.

E. Wiechert berichtet über Registrierungen künstlicher Erdbeben.

Ordentliche Sitzung am 27. Juni 1908.

C. Runge, Die Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

W. Voigt legt vor: K. Försterling, Eine Wirkung natürlich drehender Körper auf das an ihnen reflektierte Licht. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Fortsetzung auf der 3. Umschlagseite.

Seismische Registrierungen in Göttingen im Jahre 1906.

Von

Karl Zoeppritz.

Mit 1 Tafel.

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung am 7. März 1908.

Vorwort.

Der vorliegende seismische Jahresbericht schließt sich an die ähnlichen der Jahre 1903, 1904 und 1905 an, die ebenfalls in diesen Nachrichten erschienen sind. Bezüglich der registrierenden Apparate kann ich auf die von E. Wiechert im Jahresbericht von 1905 gegebene Übersicht verweisen, jedoch hat das 2000fach vergrößernde Vertikalseismometer das ganze Jahr über nicht registriert. Die Konstanten der Apparate hielten sich dauernd sehr nahe bei den von E. Wiechert ebenda angegebenen Werten. Ergänzend sei noch folgendes bemerkt: Das Dämpfungsverhältnis betrug beim 17000 kg Pendel (N. S.-Komponente) etwa 8 : 1, beim 1200 kg Pendel in beiden Komponenten etwa 5 : 1, beim Vertikalseismometer etwa 4 : 1 und beim 100 kg Pendel 8 : 1. Die Periode schwankte beim 1200 kg Pendel unregelmäßig zwischen etwa 12—14 Sekunden. Da die kleinen Astasierfedern des Vertikalseismometers nicht einwandfrei gehärtet waren, sank die Periode des Instruments während des Berichtsjahres langsam von etwa 5 Sekunden auf 3,7 Sekunden. Die Vergrößerung schneller Verrückungen V wurde mehrmals zu 170 bestimmt.

Als Grundlage der Bearbeitung des ganzen Jahres dienten die seismischen Wochenberichte, welche bis Juli einschließlich Herr G. Angenheister, von da bis Schluß des Jahres der Verfasser besorgt hatte. Manche Beben konnten nach den Berichten anderer

europäischer Stationen nachträglich als solche erkannt werden. Große Erleichterung für die genaue Festlegung des ersten Einsatzes ferner Beben gewährten mir die Diagramme des Vertikalseismographen. Es ist in den Kurvenablesungen darauf jedesmal unter „Bemerkungen“ durch das Wort „Vertikalseismometer“ aufmerksam gemacht. Besonderes Gewicht legte ich darauf, in diesem Jahresbericht nicht nur die Einsätze P und S zu geben, sondern auch womöglich die verschiedenen reflektierten Welleneinsätze, wie PR_1, PR_2, SR_1, SR_2 und PS. Die weiter unten folgende Zeichenerklärung ist identisch mit der den Wochenberichten von 1907 vorgedruckten.

Der Zeitdienst geschah in der Weise, daß etwa alle 2 Wochen eine telephonische Zeitvergleichung mit der Göttinger Sternwarte vorgenommen wurde. Auf diese Weise konnte der Gang der sehr gut gehenden Normaluhr von Strasser und Rohde auf etwa $^2/_{10}$ Sekunden genau verfolgt werden. Mit dieser Normaluhr wurde täglich die etwas weniger gleichmäßig gehende Kontaktuhr verglichen, die vermittelst Relais die Zeitmarken liefert. Es wurde so im Zeitdienst eine Genauigkeit von etwa $^1/_2$ Sekunde erreicht. Für das Entgegenkommen der Sternwarte (in der Regel besorgte die Zeitvergleichung Herr Assistent A. Kohlschütter) sei an dieser Stelle der gebührende Dank ausgesprochen.

Papierwechseln, Berußen und Fixieren u. s. w. besorgte in sorgfältiger Weise Hauswart Hilke.

Vorausgeschickt sind den Kurvenablesungen eine kleine Untersuchung über mikroseismische Bewegung, sowie Hilfstabellen, die zur Erleichterung der Berechnung der wahren Bodenbewegung aus den gemessenen Diagrammausschlägen dienen sollen.

1. Mikroseismische Bewegung.

Man kann auf die mikroseismischen Bewegungen zweckmäßig eine Einteilung nach der Periode anwenden, wie sie auch O. Hecker in dem Potsdamer Jahresbericht von 1905 gebraucht [1]). Das Heckersche Schema lautet folgendermaßen:

1. Bewegungen ganz kurzer Periode, bis etwa 4 Sek.
2. Bewegungen mit einer Periode von etwa 7 Sek.
3. „ „ „ „ „ „ 30 Sek.
4. „ „ „ „ „ „ einer oder mehreren Minuten.

1) Seismometrische Beobachtungen in Potsdam 1905. Veröff. d. Kgl. Preuß. geodät. Instit. N. F. Nr. 29.

Die unter 1. zusammengefaßten, oft als allgemeine Tagesunruhe bezeichneten Bewegungen treten in Göttingen, dank der günstigen Lage der Station außerhalb der Stadt, sehr zurück. Nur in dem 2000fach vergrößernden 17000 kg Pendel machen sich die Gasmotoren des ca. $2^1/_2$ km entfernten städtischen Elektrizitätswerks bemerkbar und erzeugen eine regelmäßige Sinuslinie mit ca. 160 Perioden pro Minute. Arbeiten 2 Motoren mit verschiedener Periodenzahl gleichzeitig, so treten regelmäßige Schwebungen auf (vergl. Abbildung 10 auf der Tafel im Jahresbericht von 1905 von G. Angenheister). Die doppelte Amplitude dieser Schwingungen beträgt im Maximum etwa 0,1 μ.

Die unter 2. erwähnten Bewegungen sollen unten noch näher diskutiert werden. Hier sei vorweg bemerkt, daß die unter 3. aufgeführten Bewegungen in Göttingen, nach der Eigenart der hiesigen Instrumente (Vergrößerung, Eigenperiode, Dämpfung und Registriergeschwindigkeit) nur sehr schwach hervortreten und deshalb hier nicht näher berücksichtigt werden sollen. Ihre Ursache ist nach O. Hecker „die Reibung des bewegten Luftmeeres an der Erdoberfläche". Als Beispiel eines Tages, wo diese Windstörungen besonders deutlich auch in Göttingen hervortreten, möchte ich den 14. Juli 1907 erwähnen. Ich lese z. B. folgende Perioden mit den zugehörigen Amplituden aus der Registrierung ab:

Datum	Zeiten M. E. Z.	Periode Sekunden	Max. Ampl. EW-Komp.	Max. Ampl. NS-Komp.
14. VII. 07	$12^h\ 16^m\ 24^s$—38^s	14	0,5 μ	0,3 μ
	$13^h\ 53^m\ 28^s$—38^s	10	0,5	0,4
	$14^h\ 12^m\ 25^s$—41^s	16	0,5	0,3

Möglicherweise sind auch noch Bewegungen mit größerer Periode vorhanden, doch lassen sie sich nicht mehr mit Sicherheit erkennen und messen [1]). Auch die Vertikalbewegung ist nicht mehr meßbar, doch sagt dies nur soviel wie, daß die Vertikalamplitude weniger als 2 μ beträgt. Die Wetterlage am 14. VII. 07 war folgende: Eine morgens über Polen lagernde Depression schreitet im Laufe des 14. nach Ungarn weiter. Dabei herrscht in Göttingen kräftiger, im allgemeinen nördlicher Wind, der all-

1) Daneben treten auch kürzere Perioden, besonders im 17000 kg Pendel, hervor, doch tragen sie wie alle diese Bewegungen weit unregelmäßigeren Charakter, als die unter 3. zu besprechende Bewegung.

mählich schwächer wird. Die Windstärke betrug nach dem Anemographen des Göttinger geophysikalischen Instituts 6—7 Meter pro Sekunde. Obgleich demnach am 14. nicht Sturm herrschte, so treten die typischen Windstörungen an diesem Tage deshalb besonders kräftig hervor, weil gleichzeitig die unter 3. näher zu betrachtende, kurzperiodige mikroseismische Bewegung sehr gering war und so nicht, wie vielfach im Winterhalbjahr, die Windstörungen verdeckte. Die Stärke der Brandungsbewegungen am 14. Juli morgens 8^h M. E. Z. war sehr gering. Man findet sie in der weiter unten folgenden Tabelle unter Nr. 6 in dem dort erläuterten Schema mit angegeben.

Ich werde im Folgenden die Ansicht zu stützen suchen, daß die unter 2. erwähnte mikroseismische Bewegung durch die Meeresbrandung verursacht wird. Damit stimmt sehr gut zusammen. daß an jenem herausgegriffenen Tag die Bewegung 2 von etwa 6—7 Sek. Periode sehr zurücktritt, dagegen jene weit unregelmäßigeren Bewegungen mit im allgemeinen längeren Perioden, wie sie durch die Reibung der bewegten Luft an der Erdoberfläche erzeugt werden, besonders stark im Diagram zu erkennen sind.

Auf die unter 4. angeführten langperiodigen Wellen möchte ich nicht eingehen, weil das 100 kg Pendel, das uns über sie besonders Aufschluß geben könnte, noch keinen Bedeckungskasten besitzt und es sich deshalb nicht entscheiden läßt, wie weit Luftströmungen im Erdbebenhaus die an diesem Pendel im Winterhalbjahr auftretenden langen, unregelmäßigen Wellen hervorrufen.

Einen weit regelmäßigeren Charakter trägt die unter 2 aufgeführte Bewegung von etwa 7 Sek. Periode. Sie kann man als die eigentliche mikroseismische Bewegung bezeichnen. Sie ist der Gegenstand vielfacher Untersuchungen gewesen.

Daß diese Art mikroseismischer Bewegung mit meteorologischen Elementen in Zusammenhang steht, ist schon früh erkannt worden. Im Allgemeinen kann man zunächst folgende Behauptung aufstellen, die sich durch Vergleichung der Wetterkarten mit den Diagrammen der Seismographen leicht bewahrheiten läßt: Herrscht über Europa bis zum höchsten Norden gleichmäßige Luftdruckverteilung, so ist die mikroseismische Bewegung schwach. Erreicht hingegen ein tiefes Minimum von der atlantischen Seite her Europa, so ist starke Bodenunruhe zu erwarten. Die Frage ist nur, welches der Phänomene, die mit dem Vordringen eines tiefen Minimums verknüpft sind, ist die wahre Ursache der mikroseismischen Bewegung? Sind es die starken Luftdruckunterschiede, insbesondere die Größe des lokalen Luftdruckgradienten, oder sind es die

dadurch verursachten starken Winde, oder ist es die gleichzeitig eintretende, kräftige Brandung an den Küsten, die die wellenförmige Bodenbewegung erzeugt? Alle genannten Erscheinungen und noch andere sind für die Ursache erklärt worden, und es ist in der Tat nicht leicht, in Europa eine Entscheidung zu treffen, wo die wahre Ursache der Bewegung zu suchen ist. Daß der am Stationsort vorhandene Luftdruckgradient bezw. die ebenda herrschende Windstärke ohne Einfluß sind, hat neuerdings O. Hecker [1]) gezeigt. Als Beweis dafür, daß die örtliche Windstärke sicher nicht die mikroseismische Bewegung verursacht, kann auch das oben schon erwähnte Beispiel des 14. VII. 1907 gelten, wo trotz des sehr kräftigen örtlichen Windes die typische periodische Bewegung von 5—7 Sek. nur ganz schwach entwickelt ist. Umgekehrt habe ich unten eine Serie von Tagen herausgegriffen, die Tage vom 1. bis zum 13. April 1906, wo verschiedentlich starke mikroseismische Bewegung sich geltend macht, während die Windstärke in Göttingen dauernd sehr geringe Werte besitzt. Nächst dem Wind am Beobachtungsort hat man an den Luftdruckunterschied als Ursache der mikroseismischen Bewegung gedacht. Hierbei scheidet jedoch gleich wieder nach O. Hecker der lokale Gradient des Luftdrucks aus. Es bleibt also nur der maximale Luftdruckunterschied über Europa als mögliche Ursache. Während es nun aber noch völlig unaufgeklärt bleibt, wie besonders große Luftdruckdifferenzen eine periodische Bodenbewegung von etwa 7 Sek. Periodenlänge erzeugen sollten, ist gerade diese periodische Bewegung ohne weiteres erklärt, wenn wir einer schon seit Jahren von E. Wiechert [2]) vertretenen Ansicht folgen, wonach diese Art mikroseismischer Bewegung dem periodischen Anprall der brandenden Meereswogen ihre Entstehung verdankt. Freilich findet O. Hecker einen weitgehenden Parallelismus zwischen dem maximalen Luftdruckunterschied über Europa und der mikroseismischen Bewegung und schließt daraus auf einen ursächlichen Zusammenhang. Sind wir aber geneigt, in der Brandung an den Küsten die wahre Ursache zu sehen, so hat jener Parallelismus im allgemeinen durchaus nichts Erstaunliches. Denn Hand in Hand mit starken Luftdruckunterschieden gehen natürlich im allgemeinen starker Wind und an den Küsten hoher Seegang. Im

1) l. c.

2) Ausgesprochen z. B. in d. 2. allgem. Sitz. d. 2. internat. seismolog. Konf. zu Straßburg Juli 1903. Vergl. die Verhandl., Beitr. zur Geophys., Ergänzungsband II 1904.

allgemeinen! Im einzelnen jedoch sind doch Unterschiede zu erwarten. Ich habe deshalb aus den Jahren 1905 und 1906 einige Fälle zusammengestellt, wo der maximale Luftdruckunterschied über Europa nicht den gleichen Gang zeigt wie der Seegang an den europäischen Küsten. In der folgenden Tabelle enthält die 2. Kolumne das Datum, die 3. bis 5. die nötigen Angaben über die mikroseismische Bewegung, nämlich 2. und 3. die von der Mitte aus gemessenen Amplituden, ausgedrückt in μ. Die Angaben beziehen sich auf die größte Amplitude, die in dem Zeitraum etwa von 7^{40} Uhr bis 8^{20} Uhr a. m. M. E. Z. auftritt. In der nächsten Spalte ist der maximale Luftdruckunterschied über Europa nach dem Wetterbericht der deutschen Seewarte angegeben. Hierauf folgt der Seegang nach den gleichen Berichten, und zwar so, daß die Küsten, nach ihrem mutmaßlichen Einfluß auf die mikroseismische Bewegung in Göttingen geordnet, aufeinander folgen. Die Stärke des Seegangs wird nach einer neunstufigen Skala geschätzt. Die Angaben unter „Nordsee" sind das Mittel folgender Stationen: Borkum, Helgoland, Cuxhaven, Helder und Vlissingen, die unter „Norwegen" das Mittel der Stationen: Oxö, Skudenes, Kristiansund und Bodö, die unter „Großbritannien" sind das Mittel von Stornoway, Aberdeen, Shields, Malin Head, Portland Bill und Scilly, die unter „Frankreich" sind das Mittel von Cherbourg, Griz Nez, St. Mathieu, Ile d'Aix und Biarritz, die unter „Ostsee" sind das Mittel von Swinemünde, Rügenwaldermünde und Memel. Die Schlußspalte gibt schließlich noch die Lage des Minimums über Europa an, alles bezogen auf 8 Uhr a. m. M. E. Z.

Nr.	Datum	Mikroseism. Beweg.			Maximal. Luftdruckuntersch. über Europa mm Hg	Seegang					Lage des barometr. Minimums
		Max. Ampl. EW Komp. μ	Max. Ampl. NS Komp. μ	Periode Sek.		Nordsee	Norwegen	Großbritannien	Frankreich	Ostsee	
1	12. I. 05 13. I. 05	1,0 0,	1,0 0,6	6—7 6	40 40	4,4 3,8	4,2 3,3	3,8 2,0	3,6 2,2	4,7 4,7	Mittel-Skandinav. West-Rußland
2	31. I. 05 1. II. 05	1,6 0,4	1,4 0,4	6—7 5	50 50	4,8 3,6	5,7 4	3,7 3,5	3,2 2,6	5,5 4	Südschweden Rußland
3	19. I. 06 20. I. 06	1,2 0,4	1,5 0,6	5—7 5	35 40	5,2 3	2,7 3	4,3 2,5	5 3,9	2,3 3	Kopenhagen Ladogasee
4	17. III. 06 19. III. 06	1,2 0,15	1,2 0,3	7 6	30 35	3,8 2,2	3 3,3	3,5 2,8	3,4 3,6	1,5 2,3	nördl. Schottland Rußland
5	18. IV. 06 19. IV. 06	0,15 0,3	0,15 0,6	6? 7	20 15	2,6 3,8	2,7 2,5	3 2,7	3,6 5,2	1,3 3,3	Südfrankreich Südostdeutschland
6	14. VII. 07					2	1,2	1,6	0,8	4,7	

In allen Fällen 1 bis 5 handelt es sich beidemal um dasselbe Minimum. Der maximale Luftdruckunterschied ist dabei im Fall 1 und 2 derselbe geblieben. Das Minimum ist vom ersten zum zweiten Tag von Skandinavien nach Rußland weitergerückt; entsprechend hat die Windstärke an den europäischen Küsten und mithin der Seegang abgenommen. Gleiches Verhalten, d. h. starke Abnahme, zeigt die mikroseismische Bewegung. Aehnlich ist die Wetterlage in Fall 3 und 4, nur hat hier der maximale Luftdruckunterschied über Europa sogar jeweils vom ersten zum zweiten der angeführten Tage noch zugenommen. Trotzdem ist die mikroseismische Bewegung im Gegenteil geringer geworden. Gerade dieses Verhalten müssen wir aber erwarten, wenn die Brandung die Ursache der mikroseismischen Bewegung ist. Denn diese hat in beiden Fällen, wenigstens an den am meisten in Frage kommenden Küsten, abgenommen. Im Fall 5 schließlich haben wir eine Abnahme des maximalen Luftdruckunterschieds über Europa, trotzdem aber eine Verstärkung der mikroseismischen Bewegung, wofür wieder die Erklärung in einer Verstärkung des Seegangs an den besonders in Betracht kommenden Küsten leicht zu finden ist.

Die herausgegriffenen 5 Beispiele mögen freilich noch nicht genügen, den behaupteten Zusammenhang zwischen Seegang an den Küsten und mikroseismischer Bewegung einwandfrei zu erweisen. Allein eine umfassende statistische Untersuchung verspricht deshalb wenig Erfolg, weil die Schätzung des Seegangs in zu großen zeitlichen Intervallen (nur einmal täglich) in einer recht willkürlichen Weise nach einer neunteiligen Skala erfolgt. Auch umfassen die täglichen Wetterberichte der deutschen Seewarte den Norden von Skandinavien nicht mehr, von wo starke Brandung sich sehr wohl noch auf die in Deutschland registrierte mikroseismische Bewegung geltend machen kann. Damit wird es zusammenhängen, daß wir einen vollständig befriedigenden Parallelismus zwischen der mikroseismischen Bewegung in Göttingen und den Angaben norwegischer Stationen über die Stärke des Seegangs auch in einem Fall nicht finden, wo über dem ganzen mittleren Europa hoher Luftdruck gleichmäßig verbreitet ist und nur im nördlichen Skandinavien ein Luftdruckminimum starke Winde und entsprechend starke Brandungsbewegung an den Küsten hervorruft. Es ist dies die Zeit vom 1. bis 13. April 1906. Immerhin ist die Periode geeignet zu zeigen, daß ganz sicher nicht örtlicher Wind die Ursache der mikroseismischen Bewegung ist, denn die Windstärke in Göttingen ist in dieser Zeit dauernd

so gering, daß überhaupt keine mikroseismische Bewegung zu erwarten wäre, und ebenso verhält es sich mit dem maximalen Luftdruckunterschied über Mitteleuropa. Auch dieser ist so klein, daß man ihm nach zu schließen kaum merkliche mikroseismische Bewegung erwarten müßte. Die folgende Tabelle gibt ein Bild der Verhältnisse in dem erwähnten Zeitraum. Alle Angaben beziehen sich wieder auf 8 Uhr a. m. M. E. Z. Der mittlere Seegang in Norwegen ist, wie bei der vorigen Tabelle angegeben, berechnet. Als Windstärke in Göttingen ist das Mittel der Angaben von Kassel und Hannover nach der Beaufort-Skala genommen:

Datum April 1906:		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Windstärke in Göttingen		2,5	2	1	1,5	2,5	0,5	0
Maximaler Luftdruckunterschied		15	15	15	20	20	15	15
Mittlerer Seegang in Norwegen		3	2,5	3,2	3,5	3,2	3,2	3,5
Mikroseismische Bewegung	Ampl. *EW*	< 0,3	< 0,3	0,35	0,75	0,9	1,2	0,75
	Ampl. *NS*	< 0,3	< 0,3	0,45	0,6	0,9	1,1	0,6
	Periode	5	5	5	6	6—7	7	7

Datum April 1906:		8.	9.	10.	11.	12.	13.
Windstärke in Göttingen		1	1,5	2,5	1	2	0,5
Maximaler Luftdruckunterschied		20	25	15	15	10	20
Mittlerer Seegang in Norwegen		4,0	3,5	2	3,2	2	2,5
Mikroseismische Bewegung	Ampl. *EW*	1,35	0,9	0,9	0,6	0,6	< 0,3
	Ampl. *NS*	1,35	0,9	0,75	0,65	0,6	< 0,3
	Periode	7	6—7	6—7	5—6	5—6	?

Aus der Tabelle geht hervor, daß die mikroseismische Bewegung am gleichen Tage ihren Maximalwert erreicht, an dem der Seegang in Norwegen am stärksten wird. Im übrigen ist der Parallelismus nicht bis ins einzelne vorhanden, doch liegt dies wohl sicher daran, daß die Größe „mittlerer Seegang in Norwegen" ein nur sehr ungenügendes Bild desjenigen Phänomens ist, das nach der hier vertretenen Ansicht die Ursache der mikroseismischen Bewegung ist.

Nur eben noch erwähnen möchte ich, daß nicht nur die Höhe der brandenden Wellen von Einfluß sein wird, sondern vor allem

auch die Richtung, in welcher sie sich, der allgemeinen Windrichtung folgend, dem Ufer nähern. Man wird also von der Energieströmung ausgehen, die ein Wellensystem im Fortschreiten mit sich führt. An einer absolut starren Küste wird die Energie vollständig reflektiert, und zwar mehr oder weniger diffus, je nach der Beschaffenheit der Küste. Bei einer nachgiebigen Küste dagegen wird ein Teil der Energie in Form elastischer Wellen sich ins Innere des Festlandes fortpflanzen.

Ueber die Art der Bewegung, die ja oft beschrieben worden ist, möchte ich noch folgendes anführen. Bekanntlich schwillt die Bewegung im Diagramm eines Horizontalseismographen fortwährend an und ab. Gruppen von etwa 5 bis zu 20 Einzelwellen wechseln ab mit Perioden nahezu vollständiger Ruhe. Dasselbe Bild bieten, was bei der geringen Verbreitung gedämpft schwingender Vertikalseismometer nicht allgemein bekannt sein dürfte, die Diagramme der Vertikalapparate. Der Vergleich zweier zu einander senkrechten Komponenten eines Horizontalseismometers lehrt, daß das Azimut der Schwingungen starkem Wechsel unterliegt, sodaß während einer mehrere Stunden anhaltenden Bodenbewegung fast stets alle möglichen Schwingungsrichtungen vorkommen. Zieht man nun noch die Angaben eines Vertikalseismometers zu Rat, so zeigt sich, daß auch hier die Wellenstärke während eines einzigen „mikroseismischen Sturmes" starkem Wechsel unterliegt. Ein Vergleich der drei räumlichen Komponenten an einem Tag mit besonders starker mikroseismischer Bewegung (9. Dez. 1906) lehrt, daß die Vertikalbewegung etwa von der gleichen Größenordnung ist wie die Horizontalbewegung, oft aber auch von dieser noch übertroffen wird, so daß wir die Wellen der mikroseismischen Bewegung nicht als reine Rayleighsche Oberflächenwellen auffassen dürfen. So tritt z. B. am 9. XII. 06 um $16^h 34^m 58^s$—$16^h 35^m 5^s$ in Göttingen eine Welle auf mit 8,2 μ horizontaler und weniger als 2,5 μ vertikaler Bewegung, während von $15^h 39^m 22^s$—$15^h 39^m 29^s$ die Horizontalbewegung 2,7, die Vertikalbewegung dagegen 6 μ betrug. Reine Horizontalbewegungen dagegen kamen während mehrerer Stunden, die einer eingehenden Vergleichung unterzogen wurden, ebenso wenig vor wie reine Vertikalbewegungen. Vielmehr schwankt das Verhältnis der Horizontal- zur Vertikalbewegung etwa von den Werten 3 : 1 bis $^1/_2$: 1[1]).

Am Schluß dieses Jahresberichts sind die Ablesungen der

1) Vergleiche das ähnliche Resultat von E. Wiechert in: Wiechert u. Zoeppritz, Ueber Erdbebenwellen, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-physik. Klasse 1907, Heft 4 pag. 469.



mikroseismischen Bewegung und zwar jeweils für ungefähr 8 Uhr a. m. M. E. Z. nach der Ost-West-Komponente des 1200 kg Pendels angegeben.

Hilfstabellen zur Berechnung der Grösse der Bodenbewegung.

Bekanntlich ändert sich die Vergrößerung eines Seismographen, sobald die Bodenperiode in der Nähe der Eigenperiode des Instrumentes liegt oder sie übertrifft, sehr stark mit dem Verhältnis der Bodenperiode zur Apparatperiode. Folgt man den Bezeichnungen von E. Wiechert[1]), so ist

$$\mathfrak{V} = \frac{V}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right\}^2 + 4 \cdot \frac{(\log \text{nat}\, \varepsilon)^2}{\pi^2 + (\log \text{nat}\, \varepsilon)^2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2}} = \frac{V}{\sqrt{S}}$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{V}$ die Vergrößerung für die Bodenperiode T,
V die Vergrößerung solcher Schwingungen, deren Periode klein ist gegen die Eigenperiode des Apparates,
T die Bodenperiode,
T_0 die Eigenperiode des Apparates bei ausgeschalteter Dämpfung,
ε das Dämpfungsverhältnis, das heißt das Verhältnis zweier aufeinander folgender Ausschläge, wenn der Apparat zwar gedämpft, im übrigen aber frei ausschwingt,
π^2 das Quadrat der Ludolfschen Zahl = 9,87.

Beträgt ein Ausschlag im Diagramm q mm, so ist die Boden bewegung $\frac{q \cdot 1000}{\mathfrak{V}} \mu$ gewesen ($\mu = {}^1/_{1000\ \text{mm}}$). Ist also der Faktor $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ für alle in einem Erdbebendiagramm vorkommenden Perioden bekannt, so läßt sich in bequemster Weise die Größe der Bodenbewegung aus der Amplitude des Diagramms durch Multiplikation mit diesem Faktor herleiten. Zur leichteren Berechnung des Faktors $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ habe ich folgende Hilfstafel aufgestellt, die die Größe $\sqrt{S}$ in ihrer Abhängigkeit von den beiden Größen ε und $\frac{T}{T_0}$ angibt. An einem Beispiel will ich den Gebrauch der Tafel kurz erläutern: Gegeben seien folgende Apparatkonstanten: V (die Indikatorvergrößerung) betrage 160, die Eigenperiode des Apparates bei ausgeschalteter Dämpfung T_0 sei 9 Sekunden, das

1) Theorie der automatischen Seismographen. Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. z. Gött. 1903, Math.-Physik. Klasse, neue Folge Bd. II, Nr. 2.

Dämpfungsverhältnis ε sei 5,4. Aufgestellt werden soll eine Tabelle des Faktors $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ für die Bodenperioden 1, 2, 3 bis 60 Sekunden. Nun ist:

$$\frac{1000}{\mathfrak{V}} = \frac{1000 . \sqrt{S}}{V}$$

Den Wert der $\sqrt{S}$ entnehme ich den Tafeln aus der Zeile für $\varepsilon = 5{,}4$ und etwa für folgende Werte von $\frac{T}{T_0}$: 0,1. 0,2. 0,3. 0,4. 0,5. 0,6. 0,7. 0,8. 0,9. 1,0. 1,2. 1,5. 2. 2,5. 3. 4. 5. 6. 7. entsprechend folgenden Werten der Bodenperiode: 0,9. 1,8. 2,7 etc. bis 63 Sekunden. Die aus der Tafel entnommenen Werte von $\sqrt{S}$, in unserem Beispiel also die Werte 0,995, 0,978, 0,954, 0,921 u. s. w., sind mit dem Faktor $\frac{1000}{V}$ zu multiplizieren. Man hat so für eine Reihe von Bodenperioden von 0,9 bis 63 Sekunden den gesuchten Faktor $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ ermittelt. Um den Faktor $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ schließlich noch für beliebig vorgegebene Bodenperioden, z. B. für 1, 2, 3 bis 60 Sekunden zu erhalten, interpoliert man am bequemsten graphisch, d. h. man zeichnet in Koordinatenpapier eine Kurve für $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ als Ordinate. Als Abszisse nimmt man die Bodenperiode T. Wegen der stark sich ändernden Steigung der Kurve für $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ wird man den Maßstab der Ordinaten für die verschiedenen Teile der Kurve zweckmäßig verschieden wählen, sodaß man immer eine mittlere Steigung behält. An der so gezeichneten Kurve kann man nun ohne Weiteres für jede Bodenperiode, auch für Bruchteile von Sekunden, den gewünschten Faktor $\frac{1000}{\mathfrak{V}}$ ablesen. Hat man die Konstruktion einmal durchgeführt, so sieht man leicht, wie dicht man die Punkte zu nehmen hat, um die Kurve genügend genau zeichnen zu können und kann sich dann namentlich in größerem Abstand vom Werte $\frac{T}{T_0} = 1$ auf ziemlich wenige Punkte, also auf wenige Werte von $\frac{T}{T_0}$ beschränken. Nur für diese ist der Wert der $\sqrt{S}$ den Tafeln zu entnehmen.

Hilfstabellen zur Berechnung der Bodenbewegung.

ε	$\frac{T}{T_0}$ 0,00	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45 $\frac{T}{T_0}$	ε
2,0	1,00	0,998	0,991	0,979	0,963	0,942	0,917	0,887	0,853	0,815	2,0
2,2	1,00	0,998	0,991	0,980	0,964	0,944	0,920	0,893	0,861	0,825	2,2
2,4	1,00	0,998	0,991	0,981	0,966	0,947	0,924	0,897	0,867	0,833	2,4
2,6	1,00	0,998	0,992	0,981	0,967	0,949	0,927	0,901	0,871	0,840	2,6
2,8	1,00	0,998	0,992	0,982	0,968	0,950	0,929	0,904	0,876	0,845	2,8
3,0	1,00	0,998	0,992	0,982	0,969	0,952	0,931	0,907	0,881	0,851	3,0
3,2	1,00	0,998	0,993	0,983	0,970	0,953	0,934	0,911	0,885	0,857	3,2
3,4	1,00	0,998	0,993	0,983	0,971	0,955	0,936	0,914	0,889	0,862	3,4
3,6	1,00	0,998	0,993	0,984	0,972	0,956	0,938	0,917	0,893	0,867	3,6
3,8	1,00	0,998	0,993	0,984	0,073	0,958	0,940	0,919	0,897	0,872	3,8
4,0	1,00	0,998	0,993	0,985	0,974	0,959	0,942	0,922	0,900	0,876	4,0
4,2	1,00	0,998	0,994	0,985	0,974	0,960	0,943	0,924	0,903	0,881	4,2
4,4	1,00	0,998	0,994	0,986	0,975	0,961	0,945	0,927	0,906	0,885	4,4
4,6	1,00	0,998	0,994	0,986	0,976	0,963	0,947	0,929	0,910	0,889	4,6
4,8	1,00	0,999	0,994	0,986	0,977	0,964	0,949	0,932	0,913	0,893	4,8
5,0	1,00	0,999	0,994	0,987	0,977	0,965	0,950	0,934	0,916	0,897	5,0
5,2	1,00	0,999	0,994	0,987	0,978	0,966	0,952	0,936	0,919	0,900	5,2
5,4	1,00	0,999	0,995	0,987	0,978	0,967	0,954	0,938	0,921	0,904	5,4
5,6	1,00	0,999	0,995	0,988	0,979	0,968	0,955	0,940	0,924	0,908	5,6
5,8	1,00	0,999	0,995	0,988	0,980	0,969	0,956	0,942	0,927	0,911	5,8
6,0	1,00	0,990	0,995	0,988	0,980	0,970	0,957	0,948	0,929	0,914	6,0
6,2	1,00	0,999	0,995	0,989	0,981	0,971	0,959	0,945	0,931	0,917	6,2
6,4	1,00	0,999	0,995	0,989	0,981	0,971	0,960	0,947	0,934	0,919	6,4
6,6	1,00	0,999	0,995	0,989	0,982	0,972	0,961	0,948	0,936	0,922	6,6
6,8	1,00	0,999	0,996	0,990	0,982	0,973	0,962	0,950	0,938	0,925	6,8
7,0	1,00	0,999	0,996	0,990	0,983	0,974	0,964	0,952	0,940	0,928	7,0
7,2	1,00	0,999	0,996	0,990	0,983	0,975	0,965	0,954	0,943	0,931	7,2
7,4	1,00	0,999	0,996	0,991	0,984	0,976	0,966	0,955	0,945	0,933	7,4
7,6	1,00	0,999	0,996	0,991	0,984	0,976	0,967	0,956	0,946	0,935	7,6
7,8	1,00	0,999	0,996	0,991	0,985	0,977	0,968	0,958	0,948	0,938	7,8
8,0	1,00	0,999	0,996	0,991	0,985	0,978	0,969	0,959	0,949	0,940	8,0
8,2	1,00	0,999	0,996	0,991	0,986	0,978	0,970	0,960	0,951	0,942	8,2
8,5	1,00	0,999	0,996	0,992	0,986	0,979	0,971	0,962	0,954	0,945	8,5
9,0	1,00	0,999	0,997	0,992	0,987	0,980	0,973	0,965	0,957	0,950	9,0
10,0	1,00	1,000	0,997	0,993	0,989	0,983	0,977	0.973	0,964	0,959	10,0
ε	$\frac{T}{T_0}$ 0,00	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45 $\frac{T}{T_0}$	ε

Die Tafeln geben die $\sqrt{S}$.

s	$\frac{T}{T_0}$ 0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95 $\frac{T}{T_0}$	s
2,0	0,773	0,727	0,678	0,626	0,572	0,518	0,467	0,420	0,384	0,366	2,0
2,2	0,785	0,743	0,698	0,652	0,605	0,560	0,518	0,484	0,460	0,454	2,2
2,4	0,796	0,757	0,716	0,674	0,633	0,594	0,559	0,533	0,519	0,517	2,4
2,6	0,805	0,768	0,729	0,691	0,653	0,618	0,589	0,567	0,558	0,562	2,6
2,8	0,812	0,777	0,741	0,705	0,671	0,640	0,615	0,598	0,592	0,599	2,8
3,0	0,819	0,786	0,752	0,720	0,688	0,661	0,639	0,626	0,624	0,635	3,0
3,2	0,820	0,796	0,765	0,734	0,705	0,680	0,665	0,653	0,654	0,668	3,2
3,4	0,833	0,804	0,774	0,746	0,720	0,699	0,684	0,677	0,681	0,697	3,4
3,6	0,840	0,812	0,785	0,758	0,735	0,716	0,704	0,700	0,707	0,725	3,6
3,8	0,846	0,820	0,794	0,770	0,748	0,733	0,723	0,722	0,730	0,751	3,8
4,0	0,852	0,827	0,803	0,780	0,761	0,747	0,739	0,740	0,751	0,773	4,0
4,2	0,857	0,833	0,811	0,790	0,773	0,761	0,755	0,758	0,770	0,794	4,2
4,4	0,863	0,841	0,820	0,800	0,785	0,775	0,772	0,777	0,791	0,816	4,4
4,6	0,868	0,847	0,827	0,810	0,797	0,788	0,786	0,793	0,809	0,836	4,6
4,8	0,873	0,853	0,835	0,819	0,808	0,801	0,802	0,809	0,827	0,855	4,8
5,0	0,878	0,859	0,842	0,827	0,817	0,812	0,814	0,823	0,843	0,872	5,0
5,2	0,882	0,865	0,849	0,836	0,827	0,823	0,826	0,837	0,858	0,888	5,2
5,4	0,887	0,870	0,856	0,844	0,836	0,834	0,839	0,851	0,873	0,904	5,4
5,6	0,891	0,876	0,862	0,852	0,845	0,845	0,851	0,865	0,888	0,920	5,6
5,8	0,895	0,881	0,868	0,859	0,853	0,854	0,861	0,876	0,900	0,934	5,8
6,0	0,899	0,885	0,873	0,865	0,860	0,862	0,870	0,886	0,911	0,945	6,0
6,2	0,903	0,890	0,879	0,871	0,868	0,871	0,880	0,898	0,923	0,959	6,2
6,4	0,906	0,894	0,885	0,877	0,876	0,880	0,890	0,908	0,936	0,972	6,4
6,6	0,910	0,899	0,890	0,885	0,884	0,888	0,900	0,920	0,948	0,985	6,6
6,8	0,914	0,903	0,895	0,890	0,891	0,896	0,909	0,929	0,958	0,996	6,8
7,0	0,917	0,907	0,900	0,896	0,897	0,904	0,917	0,938	0,968	1,00	7,0
7,2	0,921	0,912	0,905	0,903	0,905	0,912	0,926	0,949	0,980	1,02	7,2
7,4	0,924	0,916	0,910	0,909	0,911	0,920	0,935	0,958	0,989	1,03	7,4
7,6	0,927	0,919	0,914	0,913	0,916	0,926	0,943	0,966	0,998	1,04	7,6
7,8	0,929	0,922	0,918	0,918	0,922	0,932	0,949	0,973	1,01	1,05	7,8
8,0	0,932	0,926	0,923	0,922	0,927	0,938	0,956	0,981	1,01	1,05	8,0
8,2	0,935	0,929	0,926	0,927	0,933	0,944	0,962	0,988	1,02	1,06	8,2
8,5	0,938	0,933	0,931	0,933	0,940	0,949	0,971	0,997	1,03	1,07	8,5
9,0	0,944	0,940	0,940	0,943	0,951	0,960	0,986	1,01	1,05	1,09	9,0
10,0	0,955	0,954	0,956	0,962	0,973	0,989	1,01	1,04	1,08	1,13	10,0
s	$\frac{T}{T_0}$ 0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95 $\frac{T}{T_0}$	s

Hilfstabellen zur Berechnung der Bodenbewegung.

ε	$\frac{T}{T_0}$ 1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5 $\frac{T}{T_0}$	ε
2,0	0,371	0,403	0,458	0,532	0,626	0,729	0,842	0,96	1,09	1,22	1,37	2,0
2,2	0,466	0,500	0,554	0,624	0,780	0,810	0,918	1,03	1,17	1,29	1,43	2,2
2,4	0,535	0,572	0,625	0,693	0,711	0,873	0,980	1,09	1,22	1,35	1,49	2,4
2,6	0,582	0,620	0,667	0,742	0,826	0,919	1,02	1,13	1,26	1,39	1,52	2,6
2,8	0,623	0,662	0,710	0,784	0,867	0,960	1,06	1,17	1,30	1,43	1,56	2,8
3,0	0,660	0,701	0,756	0,823	0,906	9,998	1,10	1,21	1,33	1,46	1,59	3,0
3,2	0,699	0,738	0,794	0,861	0,944	1,03	1,14	1,25	1,37	1,50	1,63	3,2
3,4	0,727	0,770	0,826	0,894	0,977	1,07	1,17	1,28	1,40	1,53	1,66	3,4
3,6	0,756	0,801	0,858	0,926	1,02	1,10	1,20	1,31	1,43	1,55	1,69	3,6
3,8	0,784	0,829	0,887	0,955	1,04	1,13	1,23	1,34	1,46	1,58	1,71	3,8
4,0	0,807	0,854	0,913	0,981	1,06	1,15	1,26	1,36	1,48	1,61	1,74	4,0
4,2	0,829	0,877	0,936	1,01	1,09	1,18	1,28	1,39	1,51	1,63	1,77	4,2
4,4	0,853	0,903	0,962	1,03	1,11	1,20	1,31	1,41	1,53	1,66	1,79	4,4
4,6	0,874	0,922	0,984	1,05	1,14	1,23	1,33	1,44	1,56	1,68	1,81	4,6
4,8	0,894	0,945	1,01	1,07	1,16	1,25	1,35	1,46	1,58	1,70	1,83	4,8
5,0	0,912	0,963	1,02	1,10	1,18	1,27	1,37	1,48	1,60	1,72	1,85	5,0
5,2	0,929	0,981	1,04	1,11	1,20	1,29	1,39	1,50	1,62	1,74	1,87	5,2
5,4	0,947	0,999	1,06	1,13	1,22	1,31	1,41	1,52	1,64	1,76	1,89	5,4
5,6	0,963	1,01	1,08	1,15	1,24	1,33	1,43	1,54	1,66	1,78	1,91	5,6
5,8	0,978	1,02	1,10	1,17	1,25	1,34	1,45	1,55	1,67	1,80	1,93	5,8
6,0	0,990	1,04	1,11	1,18	1,27	1,36	1,46	1,57	1,69	1,81	1,94	6,0
6,2	1,00	1,06	1,12	1,20	1,28	1,38	1,48	1,58	1,70	1,83	1,96	6,2
6,4	1,02	1,07	1,14	1,21	1,30	1,39	1,49	1,60	1,72	1,84	1,97	6,4
6,6	1,03	1,08	1,15	1,23	1,31	1,40	1,51	1,62	1,73	1,86	1,99	6,6
6,8	1,04	1,09	1,17	1,24	1,32	1,42	1,52	1,63	1,75	1,87	2,00	6,8
7,0	1,05	1,11	1,18	1,25	1,34	1,43	1,53	1,64	1,76	1,88	2,01	7,0
7,2	1,07	1,12	1,19	1,27	1,36	1,45	1,55	1,66	1,78	1,90	2,03	7,2
7,4	1,08	1,13	1,21	1,28	1,37	1,46	1,56	1,67	1,79	1,91	2,04	7,4
7,6	1,09	1,14	1,22	1,29	1,38	1,47	1,57	1,68	1,80	1,92	2,05	7,6
7,8	1,10	1,15	1,23	1,30	1,39	1,48	1,58	1,69	1,81	1,93	2,07	7,8
8,0	1,11	1,16	1,24	1,31	1,40	1,49	1,59	1,70	1 82	1,94	2,08	8,0
8,2	1,12	1,17	1,25	1,32	1,41	1,50	1,60	1,71	1,83	1,96	2,09	8,2
8,5	1,13	1,19	1,26	1,33	1,42	1,51	1,62	1,73	1,85	1,97	2,10	8,5
9,0	1,15	1,21	1,28	1,36	1,44	1,54	1,64	1,75	1,87	1,99	2,13	9,0
10,0	1,18	1,25	1,32	1,40	1,49	1,58	1,68	1,79	1,,91	2,04	2,17	10,0
ε	$\frac{T}{T_0}$ 1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5 $\frac{T}{T_0}$	ε

Die Tafeln geben die $\sqrt{S}$.

ε	$\frac{T}{T_0}$ 1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7 $\frac{T}{T_0}$	ε
2,0	1,67	1,99	2,34	2,70	3,09	3,50	3,93	4,38	4,84	5,33	5,83	6,37	2,0
2,2	1,73	2,05	2,39	2,75	3,14	3,55	3,98	4,42	4,89	5,38	5,88	6,41	2,2
2,4	1,78	2,10	2,44	2,80	3,18	3,59	4,02	4,46	4,93	5,42	5,93	6,45	2,4
2,6	1,82	2,13	2,47	2,83	3,22	3,62	4,05	4,49	4,96	5,45	5,96	6,48	2,6
2,8	1,85	2,17	2,51	2,87	3,25	3,65	4,07	4,52	4,99	5,48	5,98	6,51	2,8
3,0	1,88	2,20	2,54	2,90	3,28	3,68	4,10	4,55	5,02	5,51	6,01	6,54	3,0
3,2	1,92	2,23	2,57	2,93	3,31	3,71	4,13	4,58	5,05	5,53	6,04	6,56	3,2
3,4	1,95	2,26	2,59	2,95	3,33	3,74	4,16	4,60	5,07	5,56	6,06	6,59	3,4
3,6	1,97	2,29	2,62	2,98	3,36	3,76	4,19	4,63	5,09	5,58	6,09	6,61	3,6
3,8	2,00	2,31	2,65	3,01	3,38	3,79	4,21	4,65	5,12	5,60	6,11	6,64	3,8
4,0	2,03	2,34	2,67	3,03	3,41	3,81	4,23	4,67	5,14	5,62	6.13	6,66	4,0
4,2	2,05	2,36	2,70	3,05	3,43	3,83	4,25	4,69	5,16	5,64	6,15	6,68	4,2
4,4	2,07	2,38	2,72	3,07	3,45	3,85	4,27	4,72	5,18	5,67	6,17	6,70	4,4
4,6	2,10	2,40	2,74	3,09	3,47	3,87	4,29	4,74	5,20	5,69	6,19	6,72	4,6
4,8	2,12	2,42	2,76	3,11	3,49	3,89	4,31	4,76	5,22	5,71	6,21	6,73	4,8
5,0	2,14	2,44	2,78	3,13	3,51	3,91	4,33	4,78	5,24	5,72	6,23	6,75	5,0
5,2	2,16	2,46	2,80	3,15	3,53	3,93	4,35	4,79	5,26	5,74	6,25	6,77	5,2
5,4	2,17	2,48	2,81	3,17	3,55	3,95	4,37	4,81	5,28	5,76	6,27	6,79	5,4
5,6	2,19	2,50	2,83	3,19	3,56	3,97	4,39	4,83	5,29	5,77	6,28	6,81	5,6
5,8	2,21	2,52	2,85	3,20	3,58	3,98	4,40	4,84	5,31	5,79	6,29	6,82	5,8
6,0	2,22	2,53	2,86	3,22	3,59	3,99	4,41	4,86	5,32	5,80	6,31	6,83	6,0
6,2	2,24	2,55	2,88	3,23	3,61	4,01	4,43	4,87	5,34	5,82	6,32	6,85	6,2
6,4	2,25	2,56	2,89	3,25	3,62	4,02	4,45	4,89	5,35	5,83	6,34	6,86	6,4
6,6	2,27	2,58	2,91	3,26	3,64	4,04	4,46	4,90	5,37	5,85	6,35	6,88	6,6
6,8	2,28	2,59	2,92	3,28	3,65	4,05	4,47	4,91	5,38	5,86	6,37	6,89	6,8
7,0	2,30	2,60	2,94	3,29	3,67	4,07	4,49	4,93	5,39	5,87	6,38	6,90	7,0
7,2	2,31	2,62	2,95	3,31	3,68	4,08	4,50	4,94	5,41	5.89	6,40	6,92	7,2
7,4	2,33	2,63	2,96	3,32	3,69	4,09	4,51	4,95	5,42	5,90	6,41	6,93	7,4
7,6	2,34	2,64	2,98	3,33	3,70	4,10	4,53	4,97	5,43	5,91	6,42	6,94	7,6
7,8	2,35	2,65	2,99	3,34	3,72	4,12	4,54	4,98	5,44	5,92	6,43	6,95	7,8
8,0	2,36	2,67	3,00	3,35	3,73	4,13	4,55	4,99	5,45	5,93	6,44	6,96	8,0
8,2	2,37	2,68	3,01	3,36	3,74	4,14	4,56	5,00	5,46	5,94	6,45	6,97	8,2
8,5	2,39	2,69	3,02	3,37	3,75	4,15	4,57	5,01	5,48	5,96	6,46	6,99	8,5
9,0	2,41	2,72	3,05	3,40	3,78	4,18	4,59	5,04	5,50	5,98	6,49	7,01	9,0
10,0	2,43	2,76	3,09	3,44	3,82	4,22	4,64	5,08	5,54	6,02	6,53	7,05	10,0
ε	$\frac{T}{T_0}$ 1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7 $\frac{T}{T_0}$	ε

Hilfstabellen zur Berechnung der Bodenbewegung.

s	$\frac{T}{T_0}$ 2,8	2,9	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6 $\frac{T}{T_0}$	s
2,0	6,96	7,49	8,08	9,33	10,6	12,0	13,5	15,1	18,4	22,1	26,1	30,4	2,0
2,2	6,98	7,53	8,12	9,37	10,7	12,1	13,6	15,1	18,5	22,2	26,2	30,5	2,2
2,4	7,00	7,57	8,16	9,40	10,7	12,1	13,6	15,1	18,5	22,2	26,2	30,5	2,4
2,6	7,03	7,60	8,19	9,43	10,7	12,1	13,6	15,2	18,5	22,2	26,2	30,5	2,6
2,8	7,06	7,63	8,21	9,45	10,8	12,2	13,6	15,2	18,6	22,2	26,2	30,6	2,8
3,0	7,09	7,65	8,24	9,48	10,8	12,2	13,7	15,2	18,6	22,3	26,3	30,6	3,0
3,2	7,11	7,68	8,27	9,50	10,8	12,2	13,7	15,2	18,6	22,3	26,3	30,6	3,2
3,4	7,14	7,70	8,29	9,53	10,8	12,2	13,7	15,3	18,6	22,3	26,3	30,6	3,4
3,6	7,16	7,73	8,31	9,55	10,9	12,3	13,7	15,3	18,7	22,3	26,3	30,7	3,6
3,8	7,18	7,75	8,34	9,57	10,9	12,3	13,8	15,3	18,7	22,4	26,4	30,7	3,8
4,0	7,20	7,77	8,36	9,59	10,9	12,3	13,8	15,3	18,7	22,4	26,4	30,7	4,0
4,2	7,22	7,79	8,38	9,61	10,9	12,3	13,8	15,4	18,7	22,4	26,4	30,7	4,2
4,4	7,25	7,81	8,40	9,63	10,9	12,3	13,8	15,4	18,7	22,4	26,4	30,7	4,4
4,6	7,27	7,83	8,42	9,65	11,0	12,4	13,8	15,4	18,8	22,4	26,4	30,8	4,6
4,8	7,28	7,85	8,44	9,67	11,0	12,4	13,9	15,4	18,8	22,5	26,5	30,8	4,8
5,0	7,30	7,87	8,45	9,69	11,0	12,4	13,9	15,4	18,8	22,5	26,5	30,8	5,0
5,2	7,32	7,89	8,47	9,71	11,0	12,4	13,9	15,5	18,8	22,5	26,5	30,8	5,2
5,4	7,34	7,90	8,49	9,72	11,0	12,4	13,9	15,5	18,8	22,5	26,5	30,8	5,4
5,6	7,35	7,92	8,50	9,74	11,1	12,5	13,9	15,5	18,8	22,5	26,5	30,8	5,6
5,8	7,37	7,93	8,52	9,76	11,1	12,5	13,9	15,5	18,9	22,5	26,5	30,9	5,8
6,0	7,38	7,95	8,53	9,77	11,1	12,5	1,40	15,5	18,9	22,5	26,5	30,9	6,0
6,2	7,40	7,96	8,55	9,79	11,1	12,5	14,0	15,5	18,9	22,6	26,6	30,9	6,2
6,4	7,41	7,98	8,56	9,80	11,1	12,5	14,0	15,5	18,9	22,6	26,6	30,9	6,4
6,6	7,42	7,99	8,57	9,82	11,1	12,5	14,0	15,6	18,9	22,6	26,6	30,9	6,6
6,8	7,44	8,00	8,59	9,83	11,1	12,5	14,0	15,6	18,9	22,6	26,6	30,9	6,8
7,0	7,45	8,02	8,61	9,84	11,1	12,5	14,0	15,6	18,9	22,6	26,6	30,9	7,0
7,2	7,47	8,03	8,62	9,85	11,2	12,6	14,0	15,6	18,9	22,6	26,6	30,9	7,2
7,4	7,48	8,04	8,63	9,86	11,2	12,6	14,0	15,6	19,0	22,6	26,6	31,0	7,4
7,6	7,49	8,05	8,64	9,87	11,2	12,6	14,1	15,6	19,0	22,7	26,6	31,0	7,6
7,8	7,50	8,06	8,65	9,88	11,2	12,6	14,1	15,6	19,0	22,7	26,7	31,0	7,8
8,0	7,51	8,07	8,66	9,89	11,2	12,6	14,1	15,6	19,0	22,7	26,7	31,0	8,0
8,2	7,52	8,08	8,67	9,90	11,2	12,6	14,1	15,7	19,0	22,7	26,7	31,0	8,2
8,5	7,53	8,10	8,68	9,92	11,2	12,6	14,1	15,7	19,0	22,7	26,7	31,0	8,5
9,0	7,56	8,12	8,71	9,94	11,3	12,7	14,1	15,7	19,0	22,7	26,7	31,0	9,0
10,0	7,60	8,17	8,75	9,99	11,3	12,7	14,2	15,7	19,1	22,8	26,8	31,1	10,0
s	$\frac{T}{T_0}$ 2,8	2,9	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6 $\frac{T}{T_0}$	s

Die Tafeln geben die $\sqrt{S}$.

s	$\frac{T}{T_0}$ 6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\frac{T}{T_0}$ 18	s
2,0	35,1	48,1	63,1	80,1	99,1	120	143	168	195	224	255	288	323	2,0
2,2	35,1	48,1	63,1	80,1	99,1	120	143	168	105	224	255	288	323	2,2
2,4	35,1	48,1	63,1	80,1	99,1	120	143	168	195	224	255	288	323	2,4
2,6	35,2	48,2	63,2	80,2	99,2	120	143	168	195	224	255	288	323	2,6
2,8	35,2	48,2	63,2	80,2	99,2	120	143	168	195	224	255	288	323	2,8
3,0	35,2	48,2	63,2	80.2	99,2	120	143	168	195	224	255	288	323	3,0
3,2	35,3	48,2	63,2	80,2	99,2	120	143	168	195	224	255	288	323	3,2
3,4	35,3	48,3	63,3	80,3	99,3	120	143	168	195	224	255	288	323	3,4
3,6	35,3	48,3	63,3	80,3	99,3	120	143	168	195	224	255	288	323	3,6
3,8	35,3	48,3	63,3	80,3	99,3	120	143	168	195	224	255	288	323	3,8
4,0	35,3	48,3	63,3	80,3	99,3	120	143	168	195	224	255	288	323	4,0
4,2	35,4	48,4	63,3	80,4	99,3	120	143	168	195	224	255	288	323	4,2
4,4	35,4	48,4	63,4	80,4	99,4	120	143	168	195	224	255	288	323	4,4
4,6	35,4	48,4	63,4	80,4	99,4	120	143	168	195	224	255	288	323	4,6
4,8	35,4	48,4	63,4	80,4	99,4	120	143	168	195	224	255	288	323	4,8
5,0	35,4	48,4	63,4	80,5	99,4	120	143	168	195	224	255	288	324	5,0
5,2	35,4	48,4	63,4	80,5	99,4	120	143	168	195	224	255	288	324	5,2
5,4	35,5	48,5	63,5	80,5	99,5	120	143	168	195	224	255	288	324	5,4
5,6	35,5	48,5	63,5	80,5	99,5	120	143	168	195	224	255	288	324	5,6
5,8	35,5	48,5	63,5	80,5	99,5	120	143	168	195	224	255	288	324	5,8
6,0	35,5	48,5	63,5	80,5	99,5	121	144	168	196	225	255	288	324	6,0
6,2	35,5	48,5	63,5	80,5	99,5	121	144	168	196	225	255	289	324	6,2
6,4	35,5	48,5	63,5	80,6	99,5	121	144	169	196	225	256	289	324	6,4
6,6	35,5	48,5	63,5	80,6	99,5	121	144	169	196	225	256	289	324	6,6
6,8	35,5	48,6	63,6	80,6	99,5	121	144	169	196	225	256	289	324	6,8
7,0	35,6	48,6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	7,0
7,2	35,6	48,6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	7,2
7,4	35,6	48,6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	7,4
7,6	35,6	48,6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	7,6
7,8	35,6	48,6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	7,8
8,0	35,6	48.6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	8,0
8,2	35,6	48,6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	8,2
8,5	35,6	48,6	63,6	80,6	99,6	121	144	169	196	225	256	289	324	8,5
9,0	35,7	48,7	63,7	80,7	99,7	121	144	169	196	225	256	289	324	9,0
10,0	35,7	48,7	63,7	80,7	99,7	121	144	169	196	225	256	289	324	10,0
s	$\frac{T}{T_0}$ 6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18 $\frac{T}{T_0}$	s

Hilfstabellen zur Berechnung der Bodenbewegung.

ε	$\frac{T}{T_0}$ 19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32 $\frac{T}{T_0}$	ε
2,0	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	2,0
2,2	360	399	440	488	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	2,2
2,4	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	2,4
2,6	360	390	440	483	526	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	2,6
2,8	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	2,8
3,0	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	3,0
3,2	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	3,2
3,4	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	3,4
3,6	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	3,6
3,8	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	3,8
4,0	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	4,0
4,2	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	4,2
4,4	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	4,4
4,6	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	4,6
4,8	360	399	440	483	528	575	624	675	738	783	840	899	960	1020	4,8
5,0	360	399	440	483	528	575	625	676	738	783	841	899	960	1020	5,0
5,2	360	399	440	483	528	575	625	676	738	783	841	899	960	1020	5,2
5,4	360	399	440	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	5,4
5,6	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	5,6
5,8	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	5,8
6,0	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	6,0
6,2	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	6,2
6,4	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	6,4
6,6	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	6,6
6,8	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	6,8
7,0	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	7,0
7,2	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	7,2
7,4	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	7,4
7,6	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	7,6
7,8	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	7,8
8,0	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	2020	8,0
8,2	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	8,2
8,5	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	8,5
9,0	364	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1020	9,0
10,0	361	400	441	484	529	576	625	676	738	783	841	900	961	1 020	10,0
ε	$\frac{T}{T_0}$ 19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32 $\frac{T}{T_0}$	ε

Die Tafeln geben die $\sqrt{S}$.

ε	$\frac{T}{T_0}$ 33	34	35	36	37	38	39	40	42	44	46	48 $\frac{T}{T_0}$	ε
2,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	2,0
2,2	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	2,2
2,4	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	2,4
2,6	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	2,6
2,8	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	2,8
3,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	3,0
3,2	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	3,2
3,4	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	3,4
3,6	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	3,6
3,8	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	3,8
4,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	4,0
4,2	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	4,2
4,4	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	4,4
4,6	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	4,6
4,8	1090	1160	1220	1399	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	4,8
5,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	5,0
5,2	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	5,2
5,4	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	5,4
5,6	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	5,6
5,8	1090	1169	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	5,8
6,0	1090	1169	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	6,0
6,2	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	6,2
6,4	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	6,4
6,6	1090	1160	1220	1300	1379	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	6,6
6,8	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	6,8
7,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	7,0
7,2	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	7,2
7,4	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	7,4
7,6	1090	1160	1220	1399	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	7,6
7,8	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	7,8
8,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	8,0
8,2	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	8,2
8,5	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	8,5
9,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	9,0
10,0	1090	1160	1220	1300	1370	1440	1520	1600	1760	1940	2120	2300	10,0
ε	$\frac{T}{T_0}$ 33	34	35	36	37	38	39	40	42	44	46	48	ε

Hilfstabellen zur Berechnung der Bodenbewegung.

ε	$\frac{T}{T_0}$ 50	52	54	56	58	60 $\frac{T}{T_0}$	ε
2,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	2,0
2,2	2500	2700	2920	3140	3360	3600	2,2
2,4	2500	2700	2920	3140	3360	3600	2,4
2,6	2500	2700	2920	3140	3360	3600	2,6
2,8	2500	2700	2920	3140	3360	3600	2,8
3,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	3,0
3,2	2500	2700	2920	3140	3360	3600	3,2
3,4	2500	2700	2920	3140	3360	3600	3,4
3,6	2500	2700	2920	3140	3330	3600	3,6
3,8	2500	2700	2920	3140	3360	3600	3,8
4,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	4,0
4,2	2500	2700	2920	3140	3360	3600	4,2
4,4	2500	2700	2920	3140	3360	3600	4,4
4,6	2500	2700	2920	3140	3360	3600	4,6
4,8	2500	2700	2920	3140	3360	3600	4,8
5,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	5,0
5,2	2500	2700	2920	3140	3360	3600	5,2
5,4	2500	2700	2920	3140	3360	3600	5,4
5,6	2500	2700	2920	3140	3360	3600	5,6
5,8	2500	2700	2920	3140	3360	3600	5,8
6,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	6,0
6,2	2500	2700	2920	3140	3360	3600	6,2
6,4	2500	2700	2920	3140	3360	3600	6,4
6,6	2500	2700	2920	3140	3360	3600	6,6
6,8	2500	2700	2920	3140	3360	3600	6,8
7,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	7,0
7,2	2500	2700	2920	3140	3360	3600	7,2
7,4	2500	2700	2920	3140	3360	3600	7,4
7,6	2500	2700	2920	3140	3360	3600	7.6
7,8	2500	2700	2920	3140	3360	3600	7,8
8,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	8,0
8,2	2500	2700	2920	3140	3360	3600	8,2
8,5	2500	2700	2920	3140	3360	3600	8,5
9,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	9,0
10,0	2500	2700	2920	3140	3360	3600	10,0
ε	$\frac{T}{T_0}$ 50	52	54	56	58	60 $\frac{T}{T_0}$	ε

Erdbeben im Jahre 1906.

Zeichenerklärung.

Charakter des Erdbebens:

I = merklich, II = auffallend, III = stark.
d = (terrae motus domesticus) = Ortsbeben (am Orte fühlbar).
v = („ „ vicinus = Nahbeben (unter 1000 km).
r = („ „ remotus) = Fernbeben (1000—5000 km).
u = („ „ ultimus) = sehr fernes Beben (über 5000 km).

Phasen:

P = (undae primae) = erste Vorläufer.
PR_n = n mal an der Erdoberfläche reflektierte Wellen.
S = („ secundae) = zweite Vorläufer.
SR_n = = n mal an der Erdoberfläche reflektierte Wellen.
PS = sog. Wechselwellen, d. h. Wellen, die bei der Reflexion an der Erdoberfläche ihren longitudinalen Charakter in transversalen oder umgekehrt verwandelt haben.
L = (undae longae) Hauptbeben („lange Wellen").
M = („ maximae) = größte Bewegung im Hauptbeben.
C = (coda) = Nachläufer.
F = (finis) Erlöschen der sichtbaren Bewegung.

Art der Bewegung:

i = (impetus) = Einsatz.
e = (emersio) = Auftauchen.
T = Periode = doppelte Schwingungsdauer.
A = Amplitude der Erdbewegung, gerechnet von der Ruhelinie.
A_E = E.W.-Komponente von A.
A_N = N.S.- „ „ „

Zeit und Maß:

Zeit = mittlere Greenwicher, gezählt von Mitternacht zu Mitternacht.
μ = Mikron = $^1/_{1000}$ Millimeter.

Bemerkung:

Die Amplitude A stellt kein geeignetes Maß für die Erderschütterung dar. Ein solches wird vielmehr gewonnen durch den Ausdruck Δg; g = Schwerkraft; $\Delta g/g$ gibt die größte scheinbare Neigung der Vertikalen während einer Schwingung an. Bei periodischen Schwingungen ist $\Delta g = \text{ca. } \frac{4\,A}{T^2}$, wenn Δg nach Milligal, A nach Mikron, T nach Sekunden gerechnet wird; Milligal = $^1/_{1000}$ Gal; 1 Gal = Centimeter — Sekunden — Einheit der Beschleunigung; es ist g = ca. 980 Gal, also 1 Milligal = ca. 1 Milliontel der Schwerkraft.

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
Jan. 2	I v	e	2 17 50	4/3		0,13	Im 17000 kg Pendel.
		F	20				
„ 2	II v	i P	4 28 16	1/4, 1,2			
			28 25	1		0,2	Von 28^m 47^s an werden die Ausschläge im Horizontal- und Vertikalseismometer stärker.
		(S ?)	29 43	4/8		1,4	
		e L	30 0				
		M	30 27	4/8		10	Die langen Wellen von 4^s bis 8^s Periode sind anfangs noch überlagert von starken Wellen kürzerer Periode ($^3/_2{}^s$), die von 32^m ab ganz zurücktreten.
			31,0	6	17	17	
			32,9	4	10	12	
		F	45				
„ 3	I u	e P	2 12 17				Vertikalseismometer.
		i	38	3			
		e	15,0	5			
		S	?				
		e L	55	30—20	2		Sehr schwach.
		F	3 50				
„ 5	I	e L	10 6	15	< 1,5		Nur 3 Wellen.
		F	7				
„ 6	I r	e L	3 4,2	10	0,8	0,5	Uhrkorrektion um $\pm 0,2^m$ unsicher.
		F	10				In Thessalien (Volo) gefühlt.
„ 6	I v	e L	13 17,2	3/2		0,08	Uhrkorrektion um $\pm 0,2^m$ unsicher.
		F	17,8				
„ 6	I	i P	21 43,3	3/2—2	0,6	1,2	Uhrkorrektion um $\pm 0,2^m$ unsicher.
		i S	52,6	3/2		0,3	Vor i P, dem kräftigen Einsatz der ersten Vorläufer, sind eine halbe Minute lang winzige Wellen bemerkbar (Periode = $^1/_3{}^s$—$^1/_2{}^s$, $A_N < 0,05$).
				6	2	2,2	
		e L	22 11	30			
		M	16,1	18		1,5	
		F	40		4		
„ 8	I r	P	16 15 16				
		S	19,5	9	1	0,5	
		e L	22	30			
		M	25,7	15	7	1,7	
		F	17				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h	m	s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h	m	s		μ	μ	
Jan. 9	II v	e P	22	6	14	1/8 bis		0,25	In den kleinen Karpathen gefühlt.
						1		0,25	
		e			34				
		e		7	9	1		0,5	
		e L		7	36	1—3/2			
						7			
		M		8,0		1		6,5	
						7	16	46	
		F		17					
„ 10	I v	e	1	8	30	1/4			
		L		8	53	1		0,25	
		F		11,7					
„ 10	I u	e L	13	43,5		50	20		
		F	14	10					
„ 16	II v	e P	2	51	29	1/8		0,04	In Preßburg gefühlt.
		e		51	48	2/3		0,07	
		L		52	53	1—3/2		3,8	
		M		53	37	7	6	15	
		F	3						
„ 18	I u	e L	7	39		15	1	< 0,3	
		F		50					
„ 18	I u	e L	22	55		19	3	< 0,5	
		F	23	10					
„ 21	III u	i P	14	1	27	4	7	4	
		i		2	48	9	5	5	
		i P R_1		4	42	4	20	15	
		i		9	6	5		3,5	Dieser Einsatz nur in der Nord-Süd-Komponente scharf.
		i S		11	14	9	80	26	
		i S R_1		16	57	10	36	10	S mit der Folge von reflektierten Wellen geht ganz allmählich in L über.
		e L		34?					
		M_1		41,2		12	25	15	
		M_2		45,7		12	23	29	
		C				13			
		F	16	30					
„ 22	I u	e L	5	14		20	2,5		
		F	5	30					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Jan. 24	I u	e L	3 30	25	2		
		F	35				
„ 24	I u	i P	6 55 0	6			Vertikalseismometer.
		S?	7 5 33				
		e L	15,2	30			
		M_1	19,7	30	10	< 1,5	
		M_2	31,7	13	9	0,6	
		F	?				Geht verloren im folgenden Beben.
„ 24	I u	P S	} ?				P und S gehen verloren im vorhergehenden Beben.
		e L	7 55	25			
		M	8 8,2	15	4	1	
		F	25				
„ 24	I u	e L	10 40	18	1,5		
		F	11				
„ 24	I u	e L	22 17	20			
		M	22,7	15	5	1	
		F	35				
„ 26	I v	L	0 21 49	$^3/_2$		0,13	Wohl vom gleichen Herd.
		F	23				
„ 26	I v	L	0 43 24	$^3/_2$		0,8	
		F	44				
„ 27	I u	i P	9 52 54	3			
		S?	10 2,0				
		e L	18	30			
			20,7	25	19	16	
		M	25,7	15	12	35	
		F	11 20				
„ 28	I u	L	15 35—36				Schwache Spur langer Wellen.
„ 31	III u	i P	15 49 4	4	5		Columbien und Ecuador.
		i_2	50 0	12	23	6	Das eigentliche Beben setzt anscheinend mit i_2 ein.
		P R_1	53,8				
		S	16 0 30	16	150	140	Bei den folgenden PS-Wellen schlägt dis EW-Komponente des 1200 kg Pendels an die Hemmung.
		S R_1	7,5				
		S R_2	11,3				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
Jan. 31		SR_3	14,5				
		eL	18	50			
		M_N	19,7	25		900	
		M_E	21,7	25	>800		Die EW-Komponente des 1200 kg Pendels schlägt über 20^m lang gegen die Hemmung.
		C		15—18			
		F	20				Um 18^h 45^m tritt in der NS-Komponente des 1200 kg Pendels eine Welle von 2^m auf.
„ 31	I v	eL	17 59 26	1		0,12	Den langen C-Wellen des vorhergehenden Bebens überlagert.
		F	18 0,2				
Febr. 1	I u	iP	2 43 52				Vertikalseismometer.
		PR_1	45 56				
		S	?				
		LM	3 6,3	12	4,8	2,3	
		F	30				
„ 5	I v	eL	3 48	1/2		$<0,05$	
		F	49				
„ 5	I v	L	4 41 2	1		$<0,5$	
		F	44				
„ 5	I u	L	5 41	25	2	2,5	
		F	6				
„ 6	I v	L	5 40 50	3/4		0,05	
		F	42				
„ 8	I v	L	0 25 29	{ 1 3/2		0,25	
		F	31				
„ 13	I (r)	eL	0 32	15	1	1,5	
		F	50				
„ 16	I u	iP	17 49 44	3/2		$<0,05$	Westindien?
		S	58,6				
		M	18 8	30		7	
			14	20	6		
		F	40				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Febr. 17	I v	e L	0 42 40	1—2		<0,05	Gehört vielleicht als Vorläufer zum nächsten Beben.
		F	44				Die Deutung des Diagrams ist durch starke mikroseismische Bewegung beeinträchtigt.
„ 17	I u	e L	1 49				
		M	55	20	0,5	1,5	
		F	57				
„ 19	II u	e	2 19 12	2—3		<0,05	Vielleicht P.
		e	21 40				
		e	22 42	{ 13	5	4	Vielleicht PR_1.
				{ 6			
		e	34,5				
		e	39,2	12	6	3	
			3 3	40	25		
		e L	10				Angabe nach dem Vertikalseismometer. In den Horizontalkomponenten schon vorher unregelmäßige Wellen langer Periode.
		M	17	21	26	35	
		C		16			
		F	5 20				
„ 20	I u	P?	21 0 3	1		0,05	Durch die starke mikroseismische Bewegung ist die Deutung erschwert. Vielleicht P u. L zwei verschiedene Nahbeben. Ausmessung nach dem 17 000 kg Pendel.
		S?	9,1				
		e L?	35	2		0,25	
		F	45				
„ 21	I u	e L	2 0	15	2		
		F	1				
„ 23	I r	i P	7 37 53	{ 2		0,25	Vertikalseismometer.
				{ 3	0,5		
		i S	42 11	6	1,5	1,5	
		L	47				
		M	50	15	3,5	2	
		F	8				
„ 23	I u	e L	10 25	20	2,5	1	
		F	45				
„ 23	I u	e L	15 16	20	1,5		
		F	25				
„ 23	I u	i P	15 28 37	3/2		0,05	Antillen? Vertikalseismometer.
		e S	37,3				
		e	38,3	15	1	1	

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)			Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h	m	s		μ	μ	
Febr. 23		e L		56					
		M	16	3		18	12		
				5		18		15	
		F	17						
„ 24	I u	i P	0	26	31	1		0,1	Japan.
		i S?		36	42	10	2,5	1,5	
		L		58					
		M	1	3		25	9	6	
		F	1	30					
„ 26	I u	P	23	0	57	{ ½		< 0,05	Vertikalseismometer.
						{ 4			
		S?		10,1					
		e L		25					
		M		36		20	5,5	6	
		F	24						
„ 27	II u	i P	19	50	43	4	0,5		Vertikalseismometer.
		i S		58	5	12	2,5	5	
		S R_1	20	0,4					
		L		10					
		M		15		15	16	14	
		C				15			
		F	21	30					
		L	22	35		16	< 0,5		Um $22^h 35^m$ treten einige lange Wellen auf, die vielleicht durch den Gegenpunkt gegangen sind.
„ 28	I u	e L	6	57		20	2	1,5	
		F	7	20					
„ 28	I u	S?	13	37,9		15	1,5		
		e L		57		30			
		M	14	3		25	5	2,5	
		F		25					
März 2	I u	i P	6	23	41	{ 1		0,4	Vertikalseismometer und 17000 kg Pendel.
						{ 5	2,7	0,6	
		P R_1		25	33				
		P R_2		26	13				
		i S		30	43	{ 6		2	
						{ 12	2,6		
		S R_1		34,2					
		e L		39		22			
		M		42,2		12	30	30	
		C				9—12			
		F	7	45					

Datum	Charakter	Perioden	Zeiten (Greenwich)			Perioden Sekunden	A_E	A_N	Bemerkungen
			h	m	s		μ	μ	
März 3	I u	i P	8	54	3	2		0,3	Vertikalseismometer.
						6	4,5	0,6	
		i S	9	4	0	12	5	2,7	
		P S		4	32	18	30	5	Sehr starke Wechselwelle.
		S R_1	ca.	9					
		e L		19		30			
				34,7		16	11		
		F	11						
„ 3	I u	e L	21	5		20	1	2,5	
		F		20					
„ 4	I v	e P	11	40	1	1/2		0,03	
		e		41	22	1		0,1	
		L		42	18	3/2			
		M		42	28			0,5	
		F		46					
„ 5	I u	e L				20			Zwischen 9h und 10h tauchen mehrmals schwache lange Wellen auf.
„ 5	I v	e L	16	52	0	1		0,1	
		F		52	50				
„ 6	I v	L	14	2	4	1; 2		0,25	
		F		4,3					
„ 8	I r	i P	17	50	33	1		0,26	Durch die starke mikroseismische Bewegung beeinträchtigt.
						2	1,5	1,5	
						5			
		S		54,8		11	14	6	
		L				18			
		M	18	0,3		15	16	7	
				1,3		14		13	
		F		30					Die Erdbebenwellen verschwinden um 18 1/2h in der starken mikroseismischen Bewegung.
„ 9	I u	e L	21	25		20	2		
		F		26					
„ 10	I u	i P	6	55	45	3/2		0,08	
		S		?					
		e	7	23,4		30			
		M_1		44,4		40	16		
		M_2	8	20		20		2	
		C				24—18			
		F	9						

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
März 10	I u	P	16 42 24	1—2		0,1	
		L	17 25				
		M	34	40	13	2,5	
		C		15			
		F	19				
„ 11	I u	P	3 18 17	1—2		0,25	
		P R_1	20 23				
		S?	26	10	1,5		
		L	38	18	4,6	1,5	
		F	4 15				
„ 13	I u	e L	14 8,5				
		M_1	11,5	30	15	5	
		M_2	19,5	15	12		
			20,5	15		10	
		F	15				
„ 14	I u	e L	21 15—30				Aus der starken mikroseismischen Bewegung tauchen schwache, lange Wellen auf.
„ 16	I u	e L	20 29,5	25			
		M	30 40	17	10	9	
		F	50				
„ 16/17	I u	P	22 54,9				Vertikalseismometer; unsicher wegen starker mikroseismischer Bewegung.
		S	23 5 14	18	4,6		
		S R_1	10,7	18	3,7		
		e L	25	30			
		M	29,5	17	3,7	3	
		F	0 30				
„ 17	I u	e L					Gegen $22^1/_2{}^h$ schwache Spur langer Wellen.
„ 18	I v	e	13 3 37	1		0,15	
		e L	14	12	0,8		
		F	35				
„ 19	II r	i P	8 1 45	1			
				3	2,3	8	
				14	4,5	35	
		i S	5 55	11		30	
				15	45		
		e L	7	35			
		M	10	19	50	100	
		F	9 30				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
März 20	I u	e L	2 56	30			
		M	3 2	25	3		
		F	45				
„ 20	I u	P	3 47,5	2		0,03	
		S ?	54,5				
		S R_1	58,7	13	2,5	2	
		e L	?				
		M	4 10,5	15	3	2	
		F	5 15				
„ 21/22	I u	i P	23 59 42	1		0,03	Vertikalseismometer u. 17000 kg Pendel.
		e L	0 35,5	25			
		M	50	20	6	1,5	
		F	1 20				
„ 22	I u	e L	21 22—32				Sehr schwache, lange Wellen.
„ 24	I u	i P	1 10 18	1		0,03	Vertikalseismometer u. 17000 kg Pendel.
		e L	44	25			
		M	51,5	15	3,5	1,5	
		F	2 5				
„ 26	I u	e L	4 12	25	4,5		
		M	15,5	20	5,5	2,5	
		F	45				
„ 27	I u	e L	5 45,5	30			
		M	56	20	5	5	
		F	6 30				
„ 27	I u	e L	23 38,5	30			
		M	41	18	7,5	9	
		F	24 5				
„ 28	I u	e L	17 49	30			
		M	56	18	3	1	
		F	18 5				
„ 28	I u	i P	18 24 56	2		0,25	Vertikalseismometer.
		e L } M }	19 8,7	45	24	< 4	
		C		15			
		F	20 10				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
März 28	I (r)	e L	20 59,2	20	5		
		F	21 15				
„ 29	I u	i P	21 58 24	1		0,05	
		e	22 8,8	21	5		
		e L	26	30	7,5		
		M	40	18	2	< 0,5	
		F	23				
„ 2	I u	e L	16 45—17 20				Sehr schwache, lange Wellen.
„ 5	I u	e L	3 35	25	3,5		
		F	46				
„ 5	I v	e	17 52 48	1/10—2/10		0,025	Vertikalseismometer u. 17 000 kg Pendel.
		F	56				
„ 5	I u	e L	19 15—35				Aus der mikroseismischen Bewegung tauchen schwache, lange Wellen auf.
„ 5/6	I u	P	22 44 39				
		i	46 1	3/2			
		S					S nicht erkennbar wegen starker mikroseismischer Bewegung.
		e L	23 24				
		M	31	18	1,4		
		F	0 20				F verschwindet in der mikroseismischen Bewegung.
„ 6	I u	i P	10 40 34	2		0,25	Vertikalseismometer.
		L?					Das übrige Beben ist wegen starker mikroseismischer Bewegung nicht zu erkennen.
„ 7	I	e L	5 37				
		M	44	12	2,5	2,5	
		F	6 5				
„ 7	I v	e	16 56 11	1/2 — 3/2		0,05	
		F	57				
„ 7	I	e L	22 23—40				Sehr schwache lange Wellen.
April 8	I u	i P	17 50 13				Vertikalseismometer.
		S	18 0,4?				S unsicher wegen starker mikroseismischer Bewegung.
		L	22	25	10	5	
		M	27	18	11		
			29			6	
		F	18				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
April 10	II u	i P	21 35 41	³/₂		0,1	
		P R_1	39,2				
		S?	46,4	12	2,5	5	
		e L }	22 4	40	70		Den Hauptwellen gehen einzelne unregelmäßige Wellengruppen um 21ʰ 58,8ᵐ und 22ʰ 1,9ᵐ voraus.
		M_1 }					
		M_2	11	18	70	50	
		C		15—18			
		F	24				
„ 13	I u	e L	18 17—30				Sehr schwache, lange Wellen.
„ 13	II u	i P	19 30 11	3	1	0,15	} Vertikalseismometer.
		P R_1	33 27				
		i S	40 32	9	4	2,5	
		S R_1	46,2				
		S R_2	50,5				
		e L	20 2				
		M	9,5	12	13	16	Unregelmäßige Wellen.
			13	10	25	5	
		C		12—15			
		F	21 10				
„ 14	II u	i P	0 4 28	2	0,5		Vertikalseismometer.
		i S	15 52	8	4,5	1,5	
		S R_1	20,5				
		e L	35,5	30	8	3	
		M	40	15	7	7	
			48,2	11	9	5	
		F	1 20				
„ 14	II u	i P	4 17 9				} Vertikalseismometer.
			14	4	2	3	1300—1700 km von Samoa.
		P R_1?	20,7				
		P R_2?	24				
		S ?	ca. 30	{ 9	1,2	0,3	
				{ 15			
		S R_1	39,9				
		e L }	5 1	50	40	9	
		M_1 }					
		M_2	10,5	24	11	7	
		C		18			
		F	6 30				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
April 18	III u	e P	13 24 30	3, 6, 9			Kalifornien (San Francisco zerstört).
				18	3	4	
		i	43				Unregelmäßige Wellen.
		PR_1	ca. 28,2				
		PR_2	ca. 30,1				
		S	34 29	17	8		
				20			
		i	35 34	8	25		
				17		80	
		e L	50,6	60			
				35	950	1500	
		M_1	53,1	30		800	Die Ost-Westkomponente des 1200 kg Pendels hat an die Hemmung geschlagen.
		M_2	57	22		750	
		M_N	59,4	20		1600	
		F	19				
„ 19	I u	e P	0 41,5	1,2		0,05	
		e	1 10,6				
		e L	12,6	30	6	5	
				24		2	
		F	2				
„ 19	I u	P	7 13 5	7			
		e	16,9	14	1,2	1,2	Durch den Papierwechsel gestört.
			8 19	18	2,3		
		F	9 30				
„ 20	I u	e L	20 27	15	0,5	0,5	
		F	37				
„ 23	I v	e	6 38 18	1/3			
		L	39 0				
		M	39 25	3/2		0,2	
		F	41				
„ 23	I u	e	8 53,8	9	0,5	0,5	
		e	9 32 2	9	1,2	0,5	
		e L	44,2	40	5,4	< 3	
			56,7	16	4	3	Sehr regelmäßige Sinuswellen
		F	10 20				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
April 25	I u	P	1 48 36	2		0,03	Vertikalseismometer.
		S?	59 4	10		1	
		e L	2 25,2	40	< 3		
				18			
		M	29	17	2,5	2,5	
		F	3 15				
„ 29	I u	i P	16 42 30	3		0,1	Vertikalseismometer.
		P R_1	46 3				
		S	53,0?	9		1	
		e	53,6	10	1,2	3,5	
		e	54,7	9	2,7	2,2	
		e L	17 14,8	25			
		M	23	20	5		
			33	15		1,5	
		F	18				
Mai 2	I u	L	0 47	15		0,5	
		F	49				
„ 2	I u	i P	1 26 12	2—3	0,2		Vertikalseismometer.
		S	36 33	15	5		
		e L	56,4	30	10		
				7			
		M E	2 7,5	14	11	5,5	Drei besonders starke Wellen
		F	30				
„ 4	I u	i P	21 0 2				Vertikalseismometer.
		L	32,5	20	1		
		F	47				
„ 4/5	I u	P	23 21 25				Vertikalseismometer.
		L	55	20	1		
		M	0 2	15	1,5	1,5	
		F	15				
„ 5	I u	P	0 34 44	1		0,05	Vertikalseismometer.
		i	35 20				
		P R	38 42				
		i S	45 14	5	4,6	1,7	
		e	45 58				
		e L	?, nach 1^h				
			1 6	25	2,5	4	
		C		18			
		F	2				

Datum		Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h	m	s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
				h	m	s		μ	μ	
Mai	5	I v	L	9	58	20	1		0,05	Nur wenige kleine Wellen vielleicht ein Nahbeben.
			F		59					
„	6	I v	L	23	12,5		1		0,05	
			F		16					
„	12	I u	iP	6	0	0	3/2		0,1	Vertikalseismometer.
			iS		8	37	9	1,5	4	
			S R_1		12,8					
			e L		23,6		35			
			M		26,1		10			
							20	10	18	
			F	7						
„	12	Iu	iP	10	51	46	1,2		0,1	Vertikalseismometer.
			L_E	11	17,5		30			
			L_N		20,5		30			
			M		24,5		30	15	17	
			F	12						
„	14	I u	i P	19	59	23	1		0,03	
			L	20	39					L sehr schwach.
			F	21						
„	16	I r	i P ?	5	9	59	1		0,1	
			e L		16		18	4	3	
			F		27					
„	16	I u	e L	11	0					
					4		15	0,5	0,5	
			F		7					
„	17	I v	i P	18	24	36	4/3		0,17	S und L treten nicht hervor
			F		29					
„	18	I u	L	17	16		20	0,5		
			F		22					
„	18	I	e	21	32					
			M		35		15	3,5	5,5	
			F	22						
„	19	I	e	19	59		15	< 0,5		Wenige schwache Wellen.
			F	20	7					

Datum		Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)			Perioden	Amplituden		Bemerkungen
				h	m	s	Sekunden	A_E μ	A_N μ	
Mai	20	I(u)	iP	11	19	20	1		0,27	Vertikalseismometer.
							2	1,5	< 0,3	
			PR_1		21	20				
			iS		26	24	8	0,5		
			i		27	8	4	0,3	2,1	
			eL		30					
			M		33,8		9	1,2		
			M_N		38,3		9	0,5	1,2	
			F	12						
„	20	Iu	iP	15	57	18	2	< 0,3	0,04	
			S		?					
			eL	16	28		20		< 0,5	
			F	17						
„	21	I	eL	13	46					
			M		57		20	1,5	1,5	
			F	14	10					
„	31	Iv	e	9	44	15	1		0,05	
			F		46,5					
Juni	1	IIu	eP	4	50	16	2		0,08	Beim Vertikalseismometer stand das Uhrwerk.
							11	3	1,5	
			S	5	0,0	?	1,2,		2	
							30	14		
			SR_1		6,4		30			
			eL		22		50			
					27		33	60	100	
			M		37		24		200	
							20	30		
			C				15—20			
			F	8						
„	1	I	L	12	7,5		1—2		0,1	
							6		0,5	
			F		25					
„	2	Iu	L	15	24		20	2,5	2,5	
			F		45					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Juni 3	I v	e	19 40 37	1/2		0,03	
		i	41 9	1		0,25	
		i	41 37	1		0,25	
		e L	42 20	2/3			
				2		0,5	
		M	42 30	2		0,5	
		F	46				
„ 4	I	L	9 52,5	10			
				15	0,5		
		F	10 15				Zwischen 13h und 17h mehrfach Andeutungen langer Wellen.
„ 7	I	i P	2 45 11				Vertikalseismometer.
		S	54,5	7	0,5	0,5	
		L	3 18,5	20	1,5	1,5	
		F	4				
„ 10	I	e L	1 1-15				Sehr schwache, lange Wellen.
„ 10	I	e L	1 51,5	15	1,5	1	
		F	2				
„ 10	I	i P	21 0 14	3			
		S	10,5	6	1	1	
		L	35				
		M	37,5	18	1	1,5	
		F	22 20				
„ 11	I v	e	5 10 50				In Cremona, Piacenza, Padua Verona gefühlt.
		M	12 11-45	1		0,04	
		F	14				
„ 13	I	i P	10 33 12	3		0,15	
		e (S?)	36,3				
		L	39,5				Sehr schwach, eben noch zu erkennen.
		F	50				
„ 16	I v	e	11 19,5				
		M	20 55	1		0,15	
		F	22,5				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Juni 17	Ir	iP	1 17 54	1		0,1	
		S	21 30	9			
				3		0,3	
		eL	24,5				
		M	27	12	1,3	2,2	
		F	45				
„ 18	Iu	eL	12 41	20	4	1,5	
		F	13 10				
„ 19	IIu	iP	11 35 43	1		0,05	
				3			
		PR₁	39,3				
		iS	46 7	4	1,7	1,5	
		i	46 23	6	2,6	2,8	
		eL	12 5	40			Den langen Wellen sind solche kurzer Periode (5ˢ) überlagert.
			10	30	60	60	
		C		12—18			
		F	13 30				
„ 19	Iu	L	18 9,5	20			
				15	0,5	1	
		F	30				
„ 20	Iu	P	2 38 53	3/2		0,05	
		S	49 8	6			
				15	2,2	0,3	
		eL	3 6	35	14	4	
		C		15—17			
		F	4				
„ 22	Iu	iP	3 28 35	3			Vertikalseismometer.
			29 16	2—3	1,2	0,1	
		PR₁	31 56	4	1		
		e	32 39	3			
		S	38,9	6	0,8	0,6	
		PS	39,8	14		1	
				18	3		
		SR₁	45,5				
		eL	?				Erste langen Wellen sehr schwach.
		M	4 3	16	1,1	0,2	
		F	30				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Juni 22	I	L	7 30	15—20	< 0,5		Hin und wieder tauchen lange Wellen auf.
		F	9				
„ 23	I	L	7 0	10	0,5	0,5	
„ 23	I	L	10 14	20			Sehr schwache Wellen.
„ 24	Iu	e	7 36,5				Kurze Wellen auf dem Seismogramm des Vertikalseismometers.
		L	55	30	5	2,5	
		F	8 40				
„ 24	Iu	iP	11 29 17	2, 5, 12	1		Vertikalseismometer.
		PR_1	32 38				
		S	39 29	15	1,6		
				12		1,3	
		PS	40,2	18	5		
		eL	12 1	30			
		M	9,5	17	20		
			10	15		14	
		F	13 15				
„ 26	Iu	iP	12 32 6	1—2		0,05	Vertikalseimometer.
		iS	41 57				
		eL	56,5				
		M	13 0,5	24	3,5	1	
			2,5	18	3,2	< 0,5	Sehr glatte, sinusartige Wellen.
		F	40				
„ 27	Iv	eP	9 47 21	1—2			Wales. 17 000 kg Pendel hat nicht registriert.
		i	48 35				
		L	49	2			
		M	49 20	2	0,3	0,7	
				6			
		F	52,5				
„ 30	I		11 30	10—12	1	1	Wahrscheinlich lange Wellen.
Juli 4	Iv	e	2 33 55	1/2		< 0,02	In Cettinje gefühlt.
		i	35 23	3/2		0,05	
		eL	35 46				
		M	36 18	1		0,2	
		F	40				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
Juli 4	I v	e L	4 45	3		0,2	In Cettinje gefühlt.
		F	48				
„ 4	I v	e L	7 2,5	3		0,15	
		F	4				
„ 4	I v	e L	10 18,7	2		0,1	
		F	20				
„ 6	I v	e L	0 53 6	3			
		M	53,8	3/2		0,13	
		F	1 2				
„ 8	I u	P	22 44 6	1		0,1	Vertikalseismometer hat nicht registriert.
		e S	53,7	9	0,5	< 0,25	
		e L	23 12,5	25			
		M	20	20	4	2,5	
		F	24				
„ 10	I u	P	20 0,1				Der erste Einsatz fällt vielleicht in die Stundenmarke.
		S	10,4	9	1,2		
		e L	34	30			
		M	39,2	25	5	3	
		F	21 10				
„ 11	I u	e L	20 6-20	24			Einige schwache, lange Wellen.
„ 12	I	e	7 52 34	{ 1		0,12	
				2 }			
		F	56				
„ 12	I		10-12^h				Mehrfach schwache, lange Wellen von 20—30^s Periode. Vielleicht keine wahren Erdbebenwellen.
„ 13/14	I u	i P	23 53 40	{ 3		0,6	Vertikalseismometer.
				12 }	1,3		
		S	0 1,0				
		P S	1,8	18	15	10	
		S R_1	5,7				
		e L	10,4	30			
			12	{ 30	28		
				15 }		7	
			16	20	25	27	
		F	1 40				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Juli 15	Iu	iP	16 17 55	1 3		0,6	Vertikalseismometer u. 17 000 kg Pendel.
		eL	17 6				
			24,6	20	1	< 0,6	A_N an andern Stellen ebenso groß wie A_E.
		F	40				
„ 16	Iu	eP	21 27 6	3—4			Vertikalseismometer.
		PR_1	30 37	2			
		S	37,7	10	1,7	0,4	
		eL	54,4	30	4	5	
		M	22 7,5	16	2,6	0,8	
		F	40				
„ 17	I	eL	18 27,5	12	1	1	
		F	34				
„ 19	I	L	0 31,5	15			Vielleicht ein Paar lange Wellen.
		F	32,5				
„ 20	Iu	iP	11 28 50	3			Vertikalseismometer.
		e	32,3	9	1,8	0,4	
		S	35,8				
		PS	36,2	10	2,4	2,2	
		eL	46,5	30			
		M	51,4	18	17	11	
		C		15—18			
		F	12 40				
„ 20	Iu	iP	20 37 6	1		0,15	
		S	44 6	6	1	2,5	
		SR_1	47,9				
		M	57,5			2,5	L ist nicht zu bestimmen.
		F	21 20				
„ 22	Iu	eP	18 46 28	3			Nur im Vertikalseismometer. Bei S Periode und Amplitude unregelmäßig.
		S	56,9				
		L	19 9,5				L schwache, unregelmäßige Wellen, die erst gegen Ende meßbar werden.
			34,5	15	1,5	1,5	
		F	20				
„ 23	I	L	7 9,5	30	2,5	2,5	Ein Paar schwache, lange Wellen.
		F	20				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
Juli 25	I r	e L	11 51,2	10	2 μ	1 μ	In Belgrad gefühlt. Schon von 50m 38s schwache Wellen im 17 000 kg Pendel. (T = 1/3; A_N = 0,02.)
		F	58				
„ 28	I	i P	2 29 12				Vertikalseismometer.
		?					Das Uhrwerk des 1200 kg Pendels stand.
„ 29	I (v)	e L	21 54	3			
„ 29	I (u)	e L	23 3,5	17			Einige sehr schwache Wellen.
		F	18				
Aug. 1	I v	e	19 2 36	1/3		0,05	In Württemberg zwischen Remstal und Schwarzwald gefühlt.
		e	56	} 1/2			
		e L	3 8				
		M	3 13			0,5	
		F	6				
„ 1/2	I u	i P	23 28 54	3—4	0,3	0,5	Vertikalseismometer.
		e S	38,3	12	1	1,5	
		e L	56,5	30			
		M	24 0,5	17	4	9	
			3	14	6	5	
		F	1 40				
„ 2	I	e	4 24—25	4		0,3	Einige schwache, kleine Wellen.
„ 2	I	e L	23 10,5	17	1	1,5	Einige sehr schwache, lange Wellen.
		F	40				
„ 6	I r	i P	3 45 6	4	1	0,3	Vertikalseismometer.
		i	46 57	3	0,4	< 0,3	
		e	47,4	8	0,5	< 0,3	
		e L	55	8	0,7	1	
			4 0	{ 9	0,5		
				6		0,6	
		F	15				
„ 8	I	e L	3 4,5				Schon um 2h 40m eine ganz schwache Störung; vielleicht zu diesem Beben gehörig.
		M	16,5	17	3	1,5	
		F	50				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h	m	s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
Aug. 8	I	e	19	12		20			Ein Paar sehr schwache, lange Wellen.
„ 8/9	I u	P	23	21	18	3/2	0,15	0,15	
		S		31,4					
		e L		51,5					
		M		53,5		20	3	1,5	
			0	1,5		16	1,5	1,5	
		F	1	10					
„ 11	I r	e	10	3,0					In San Remo gefühlt. 17 000 kg Pendel.
		e		4	1				
		L		4	29				
		M		4	44	1		0,04	
		F		6,5					
„ 11	I	e	13	37,5		8	0,5	0,5	
		e L		47		11	0,8	0,5	
		F	14						
„ 12	I	e L	20	0		15	0,9	0,8	
		M		4					
		F		30					
„ 13	I	P?	18	54	40	2	<1	<1	Schon um 18h 51m 5s in der Nord-Süd-Komponente winzige Wellen.
		e L	19	8,4					
		M		12		20	7	8	
				16		12	5	4	
		F	20						
„ 14	I	e L	21	19,5					
		M		22		6—8	0,5	0,6	
		F		40					
„ 15	I	e L	20	37,5		18	1	1,4	
		F	21						
„ 15	I(u)	P	22	13	28	2			Vertikalseismometer.
		S		20	56				
		S R_1		24,5		8			
		e L		32,5		16	4	8	
		M_1		34		11	5	7	
		M_2		37,5		16	10	6	
		F	23	20					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Aug. 17	III u	P	0 22 43	2—4			Herd in der Nähe der Aleuten
				4	1,2		
				9		3	
		S	32 18	15	20	8	
			33,5	15	15	16	
		S R_1	37 50	20	55	70	
		e L	43	35			
		M	44,5	35	110	300	
			48	33	600	300	
			50	34	700	500	Das weitere Beben überlagert von Vorläufern und Hauptwellen des folgenden.
" 17	III u	e	0 55 16				Valparaiso zerstört. Vertikalseismometer, e vielleicht = PR_1; PR_2 fällt in die Stundenmarke, deshalb Zeit um 16^s unsicher: $0^h\ 59^m\ 29^s \pm 8^s$.
		PR_2 ?	59 29				
		M	1 46,5	20	500	600	
			50,5	18	700	170	
			52	17	600	400	
		C		18—22			
		F	5 30				
" 17	I u	e L	6 56,5	22			
		M	7 4,5	18	5	2,4	
		F	30				
" 17	I u	e L	7 49,5	22			
		M	57	18	3	1,4	
		F	8 30				
" 17	I u	e L	9 54,5				
			10 1,5	22			
		M	7,0	18	5	2,5	
		F	50				
" 17	I	L	11—				Durch den Papierwechsel gestört.
			11 30				
" 17	I u	e L	12 47,5				
		M	54,5	18	1	0,25	
		F	13 20				
" 17	I u	e L	13 45,5	21			
			53,5	21	7	3	
			57,5	18	5	3	
		F	14 40				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)			Perioden Sekunden	Amplituden		Bemerkungen
							A_E	A_N	
			h	m	s		μ	μ	
Aug. 17	I u	e L	16	3,5					Sehr schwach.
				8,5		15	0,4	0,4	
		F		20					
„ 17	I u	e L	21	8,5					
		M		24		18—21	2	1,6	
		F		55					
„ 18	I u	e L	1	47,5					
		M_1		50,5		21	5	1,2	
		M_2		56,5		18	2,5	1,4	
		F	2	20					
„ 18	I u	e L	7	24,5					
			8	14,5		25	5,5	2,7	
		F	9	20					
„ 18	I u	e L	13	27,5		18			Nur ein paar schwache, lange Wellen.
„ 18	I u	e L	16	19		25	4	2,7	
		F		45					
„ 19	II u	P?	9	48	59	5			Vertikalseismometer.
		S		?					Das 1200 kg Pendel ist gestört.
		e L	10	30,5					Vertikalseismometer.
		M_1		32,5		22	17	10	
		M_2		38		18	17	9	
		F	12	10					
„ 19	I	e L	13	14,5		12			Schwache, lange Wellen.
		F		30					
„ 19	I u	e L	16	32,5					
				40,5		22	5	2,6	
				44,5		18	5	4	
		F	17	20					
„ 20	I u	e L	11	13,5					
		M_1		18		20	1,3	1,7	
		M_2		23		15	1,7	0,7	
		F		40					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Aug. 21	I u	e L	12 19				
		M	25	20	4	2,2	
			30,3	17	3	2	
		F	13 15				
„ 21	I r	i P	20 45 54	4—5	0,6	0,6	
		S	50,3	8	1,2	1	
		e L	53	25			
		M	54,7	15	5	8	
		F					Das Ende läßt sich wegen Ueberlagerung durch das folgende Beben nicht angeben.
„ 21	I u	e L	21 27	21			Schwache, lange Wellen.
		F	50				
„ 22	I u	e L	21 11,3				
		M	34,3	20	1,3	1,1	
		F	55				
„ 24	I u	e L	2 41,3				
		M	50	18	2,6	1,9	
		F	3 10				
„ 25	II u	i P	12 2 45	4	0,5	0,6	Vertikalseismometer.
		P R_1	4 53				
		S	10,2				
		S R_1	13,8	9			
		e L	22,7	18	5	4	
			27,3	12	2,5	2,7	
			35,3	15	4	1,5	
		F	13 30				
„ 25	II u	i P	13 56 23				Vertikalseismometer.
		P R_1	58 26				
		S	14 3 5				
		P S	3,8	25			
		S R_1	7,3	14	4	10	
		e L	13,3	30	30	17	
		M_1	18,3	20	25	11	
			26,7	15	14	16	
		M_2	28	18	25	10	
		F	16 40				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Aug. 25	I u	e L	17 26	10			Schwache, lange Wellen.
		F	gegen 18h				
„ 26	II u	e	6 20 30				
		P R1	21 15	8	1,2	1,2	Neu-Guinea?
		S?	28,2				
		PS	30,8	15	5	2,5	
		S R1?	37,1				
		S R2?	41,1				
		e L	55,3				
		M	59	35	45	25	
			7 4,7	20	25	18	
			16,3	17	18	25	
		F	9 20				9h 50m—10h 10m treten nochmals lange Wellen auf.
„ 27	I	e L	16 47	8—11	0,7	1,2	Das 17 000 kg Pendel hatte Reibung.
		F	17				
„ 28	I u	e	5 41,3				
		e L	55,8				
		M	6 4,3	22	5	6	
			7,3	18	7	4	
			12,3	13	5		
		F	7				
„ 29	I v	e L	8 21 2	2—3	0,6	0,4	Dalmatien.
		F	23,5				
„ 29	I	e L	16 58	30	1	1,1	
		F	17 30				
„ 30	II u	i P	2 52 27	3—4	0,9	0,8	Tacna, Arica.
		P R1	56 29	4			
		i S	3 3 20	12	6	2,5	Der Einsatz von S sehr scharf in der Ost-West-Komponente.
		e L	23				
		M	26	35	16	22	
			34,3	21		18	
			36	19	25		
		F	6				
„ 31	I u	e L	1 31				Einige sehr schwache, lange Wellen.
		F	2				

Datum	Charakter	Perioden	Zeiten (Greenwich)			Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h	m	s		μ	μ	
Aug. 31	I u	i_1 P	15	8	23	3—4	0,6	0,7	
		i_2 P		8	47				
		i S		17	14	9	4,2		
		P S		17	52	9		5,5	
		e L		34,3					
		M		35,3		14		4	
				41,2		13	3,5		
		F	16	15					
Sept. 1	I v	i	5	9	32	1/2		0,15	Im Rheinland (Ems, Boppard u. s. w.) gefühlt.
		i			40	1/3		0,25	
		e			55	4/8		0,2	
		M		10	13	1/4		1,5	Lange Wellen (T = 1s) sind überlagert von kurzen (T = 1/4s).
		F		11					
„ 6	I u	i P	19	17	43	3	0,9	0,7	Vertikalseismometer.
		e		21,5					
		e		51,7		18	1	1,9	
		e L	20	12		30			
		F	21	10					
„ 7	II u	P	19	4	59	4—6	0,5	0,6	Vertikalseismometer unlesbar.
		P R_1		8,5					
		S		15	24	12	4,5	3	
		e L		32,3					Vertikalseismometer.
				35,3		30	13	9	
				39,3		22	40	30	
				41,3		19	65	40	
				50		15	50	40	
				50,8		15	30	70	
		C				15			
		F	22	10					
„ 8	I v	e L	0	45	44	1/8		0,02	In Garmisch gefühlt.
		F		46,2					Sehr schwach im 17000 kg Pendel.
„ 11	I	e L	13	46		13	0,4	0,7	
		F	14						
„ 11	I	e L	19	11	55	10	0,6	0,9	
		F		16					
„ 12	I	e L	11	47	10	10	0,7	1	
		F		50					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Sept. 13	I(u)	eL	3 52 20	30	8		Das Diagram der Nord-Süd-Komponente des 1200 kg Pendels ist unleserlich.
		M	57	24			
		F	9 10				
„ 13	I	P	10 7 45				Vertikalseismometer.
		S?	13,3	8	2		Die Nord-Süd-Komponente des 1200 kg Pendels ist unleserlich.
		SR_1?	17,2	9	0,3		
		L	?				L undeutlich.
		F	40				
„ 14	Iu	eP	13 24,3				Vertikalseismometer.
		eL	14 9,3	25	5,5	4,5	
		M	14,7	20	6	4	
		F	50				
„ 14	IIu	e	16 23 39	3—5	1,5	1,5	Neuguinea.
		PR_1	25 22				Vertikalseismometer, im 1200 kg Pendel PR_1 schon 25m 12s.
			26 8	9	2	1,5	
		S	unsicher				Im Vertikalseismometer ist diese Welle nicht zu erkennen.
			37,3—37,8	22		3,5	Eine kräftige Wellengruppe.
		SR_1	42	15	20	25	Die Deutung der Einsätze ist schwierig, zum Teil unsicher.
		eL	53,3	60			
		M	17 3	40	300	600	
			7	26	400	400	
			14,3	24	65	300	
		C		20—25			
		F	19 10				
„ 16	I	i	14 44 51	1/10	1,6	0,15	Explosion bei Besançon. Außer den kurzen Schwingungen ist noch eine längere Schwingung von etwa 1/2s und von der gleichen Größenordnung zu erkennen.
		F	55				
„ 17	Iu	eP	4 28,8				Vertikalseismometer (schwach).
		S?	39,3				
		eL	5 2,3	20			
		M	7	15	3,5	4	
			11	12	3	8	
		F	40				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Sept. 17	I u	e	8 58,9				
		e	9 8,3				
		e	20,3	25	5,5	3	P unsicher, auch im Vertikalseismometer.
		e L	32,8	35			
		M	39,3	30	15	15	
			41,3	24	15	17	
		C		17			
		F	11 10				
" 17	I v	i L	18 0 21	$^{3}/_{2}$, 2		0,1	
		F	1 50				
" 20	I u	e L	18 23				
		M	36	20	3	6	
		F	19				
" 21	I u	i P	1 34 9				
		S	unsicher				
		e L	2 31	3			
		M_1	40	18	2		
		M_2	53	18		3	
		F	3 30				
" 21	I	e L	16 37				
		M	45	18	1	1,5	
		F	17				
" 28	II u	i P	15 37 32	4	1,5	0,8	} Vertikalseismometer.
		P R_1	41 5	3			
		i S	47 55	10—12	35	7	
		e L	10 5,8	40			
			10,2	30	30	14	
		M	11,7	25	35	10	
		C		18			
		F	17 30				
" 29	I u	e L	4 18				
		M	23,2	16	1,2	3	
		F	50				
" 29	I u	e L	13 56	18	0,7	0,9	
		F	14 5				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Okt. 2	II u	e	2 10 35	3—5		0,5	Herd Neu-Guinea. Vertikalseismometer.
		P R₁	12 22				
		S	23,1	12—16	5,5	4	
		PS	24,7				
		e	29,0	15	6		
		e	29,5	10		4	
		S R₁	34,1	20	17	15	
			von 43m ab				
		e L	49	50			
			52,7	33	90	110	
		M	3 5,2	22	85	140	
		C		15—18			
		F	5 30				
„ 2	I u	e L	13 14-19m	20			Ein paar schwache, lange Wellen.
„ 2	I u	P	14 48 17	3	0,6	1	
		S	57 49	16	1,5	4,5	
		e L	?				
		M	15 34	18	2,5	5	
		F	16 30				
„ 3	I u	e L	1 5				
		M	16	18	1,5		
		F	2 10				
„ 4	I	e L	7 8	15			Einige schwache, lange Wellen.
„ 6	I u	e L	13 40—14				Schwache, lange Wellen treten ab und zu aus der mikroseismischen Bewegung hervor.
„ 8	I	P	5 4 42	4/3		0,15	Durch mikroseismische Bewegung beeinträchtigt.
		e	10,2				
		e	15,2	7	3,5		
		F	30				
„ 10	I u	e L	8 14,3				
		M	23,8	21	4	2	
		F	9				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Okt. 10	I u	i P	13 6 14				Vertikalseismometer.
		S	16,5	9			
		e L	43	36—30			
		M_1	47,5	22	7	12	
		M_2	54,8	21	15	15	
		F	15				
„ 10	I u	i P	22 55 53	2—3			Vertikalseismometer.
		i	56 13				
		S	23 6,7	8,14			
		S R_1	12,3				
		e L	26,3	40			
		M_1	30	24	4,5	10	
		M_2	34	18	4,5	5,5	
		F	24 40				
„ 11	I u	P	5 25 2				Vertikalseismometer.
		S	36,0				
		e L	6 5				
		M_1	12	20	4,5	4,5	
		M_2	18	20	4	5,5	
		F	7 20				
„ 12	I	i P	1 7 37				
		e	16,8				
		L M	43	12	0,5	1	
		F	4 15				
„ 12	I	P	ca. $11^h 35^m$				Vertikalseismometer durch Arbeiten im Erdbebenhaus gestört.
„ 15	I	e L	14 40				Anfang und Ende unsicher infolge starker mikroseismischer Bewegung.
		M_N	47	25		5,5	
		M_E	15 5,3	22	2,5		
		F	?				
„ 16							Betrieb von 15^h—17^h durch Arbeiten im Erdbebenhaus gestört.

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden	Amplituden		Bemerkungen
				Sekunden	A_E	A_N	
			h m s		μ	μ	
Okt. 17	I u	P	9 54,6				Vertikalseismometer.
		S	10 5 8	18		3	
		e L	26,3	40—25			
		M_1	31,3	25	40	45	
		M_2	34	20	20	40	
		M_3	41,3	15	15	25	
		C		15			
		F	12				
„ 20	I r	i P	16 14 31				Vertikalseismometer.
		S	19,0				
		e L	23				
		M	24,2	14		2,5	
			27	10	1,2	1,5	
		F	50				
„ 20	I v	e L	16 52 53	4/8		0,05	
		F	53,8				
„ 23	I	i P	3 23 40				Vertikalseismometer. Sehr schwach.
		L	ca. 4h	20 - 16			
		F	4 15				
„ 24	II u	i P	14 51 4	2	2	0,5	Chodschent und Katta-Kurgan. Vertikalseismometer, die größte Ausweichung bei beiden Einsätzen etwa 9s später. Bei der Ost-West-Komponente tauchen schon etwas früher längere Wellen auf. Eine Welle von 30s ist erkennbar. Die Wellen langer Periode sind überlagert von kürzeren Wellen (T = 6—9s).
		P R_1	52 49	2	3	1,2	
				15	6	< 3	
		S_N	57 38	10		3	
				30	14		
		S R_1	15 0 37	10	3,3		
			0 47	10		3,2	
		e L	6?	35—24	100	80	
		M	11,8	12—15	75	120	
		C		12—15			
		F	17				
„ 27	I	e L	4 43— 5				Aus der mikroseismischen Bewegung tauchen schwache, lange Wellen auf.
„ 28	I	P	16 4 2	1			Vertikalseismometer. Vielleicht schon etwas früher im 17 000 kg Pendel kleine Wellen. (Starke mikroseismische Bewegung.)
		e	8 15	3	2,3	< 3	
		e	13 43	4	4	< 3	
		e L	48,3	ca. 20		1	
		F	17				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	Amplituden A_N	Bemerkungen
			h m s		μ	μ	
Okt. 31	I u	i P	1 58 40	2—3			Vertikalseismometer.
		e L	2 23	24			
		M_N	29,3	12		22	
		M_E	32,3	12	15		
		C		10—15			
		F	3 30				
Nov. 5	I u	e P	20 10,8				Vertikalseismometer.
		S	20,7	12	1,5		
		S R_1	ca. 26,8^m	7			
		e L	43	60			
		M_1	48,8	33	4	10	
		M_2	59,3	21	2,5	5	
		C		15—18			
		F	22				
„ 5/6	I u	e P	23 19,3				
		S	29,1				
		e L	56	40			
		M	0 3,3	18	2	2,5	
		F	45				
„ 8	I u	i P	0 52 25				Vertikalseismometer.
		S	1 3,1	8	3		
		S R_1	8,9				
		e L	26				
		M_1	33,3	15	2	5	
		M_2	41	15	2,5		
			42,3	12		2	
		F	2 15				Dem Ende des Bebens ist vielleicht noch ein zweites überlagert.
„ 8	I u	e L	20 40	15			Einige schwache, lange Wellen.
„ 9	I	e L	2 25				
		M	28,3	12		0,8	
		F	35				
„ 10	I u	e L	6 18				
		M	28	20	1,5	3	
		F	7				
„ 10	I v	e L	18 7 18	1		0,06	Gefühlt in Chiavari, Parma usw. P nicht erkennbar, weil das 17000 kg Pendel durch das Elektrizitätswerk gestört ist.
		F	9				

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich)	Perioden	Amplituden		Bemerkungen
			h m s	Sekunden	A_E μ	A_N μ	
Nov. 12	I u	i P	17 41 7	3	1	< 0,5	
		S	48,1	6	0,3	1	
		e L	55	3, 6, 9, 11			Sehr unregelmäßige Wellen.
		M	18 2,8	9	10	9	
		F	19				
„ 13	I	e L	18 14				
		M	17,8	18	0,5	0,8	
		F	40				
„ 14	II u	i P	17 57 9	6		2,5	Vertikalseismometer. e_1 fällt in die Stundenmarke.
		e_1	ca. 59,8				
		e_2	18 1 14	6			
		e S	13,8	12			
		S R_1	22,7				
			23,8	22	8		
		e L	37	50—42	30		Von 53m ab regelmäßige Sinuswellen.
		M	58	24	40	40	
		C		16—20			
		F	20 30				
„ 15	I u	e L	3 48				
		M	50	20		1	
		F	4 10				
„ 16	I	e L	21 9	11		0,25	Ein paar sehr schwache, lange Wellen.
„ 19	II u	e	7 36 45				Vertikalseismometer. Der erste Einsatz von P wird von den meisten mitteleuropäischen Stationen nicht mehr registriert, wohl aber noch von Tiflis und Triest.
		P R_1?	37 39	3—6, 12	6	11	
		P R_2?	41 17				
		S_N	45 21	12	?	6	
		P S?	47 15	9, 15	18	3,6	
		S R_1	53 35	23	200	60	
		e	57,8				
		S R_2?	59,8				Nicht deutlich zu erkennen, fällt vielleicht in die Stundenmarke.
		S R_3?	8 4,2				
		i	4 35	40	nicht meßbar	200	
			6,3	60—70		200	Es reihen sich einige sehr unregelmäßige Wellen von etwa 1m Periode an. (Im 100 kg Pendel weitaus Maximum.)
		e L	ca. 20	30			Vertikalseismometer.

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h	m	s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E	A_N	Bemerkungen
Nov. 19 Fortsetzung		M		33		22	20 μ	70 μ	
		C				15—18			
		F	nach 10h 10m						
Nov. 22	I	e L	0	1,8					
				4,8		16	1,5	1	
				7,3		10	1		
		F	1						
„ 22	I	e L	0	32					
		M		34		15	0,6		
		F		45					
„ 22	I	e L	ca. 9h	20m					Ein paar sehr schwache, lange Wellen.
„ 25	I u	i P	11	24	37				
		i		25	14	4	1	1,2	{ Vertikalseismometer.
		S		34	6	8	2,5	2	
		P S		35,3		8	3,5		L sehr schwach.
		(e L		45)					
		F	12	30					
„ 28	I	i P	9	16	37				
		P R_1		19,5					
		S		26,6		9	6	2,5	
		e L		44?					
		M		56,2		18	1,5	3	
		F	10	30					
Dez. 3/4	II u	i P	23	10	7	{ 3			Sehr kräftig im Vertikalseismometer.
						6	7	3	
		P R_1		12	53	3			
		S		18	45	10	5	30	
		P S		19	36	6			
		e L		26		45		60	
		M		30		18	9	30	
		C				12—15			
		F	0	20					
„ 10	I v	P	16	13	56				Nur im 17 000 kg Pendel.
		L			58	2/5			
„ 12	I	e L	4	58					
		M	5	6,2		14	1	0,7	
		F		30					

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
Dez. 15	I	e	19 24 42				
		L	30,4				
		F	31 13	15	11	14	
			45				
„ 16	I		19 29	14		1	Einige schwache, lange Wellen.
„ 17	I	e L	11 40-12^h				Sehr schwache, lange Wellen.
„ 17	I	e L	ca. 18^h 6^m				In der Ost-West-Komponente des 1200 kg Pendels sind einige sehr schwache, lange Wellen erkennbar.
„ 18	I	i P	21 18 59				Tonga-Archipel.
		i	19 3				Vertikalseismometer.
		S	?				
		e L	22 21	18			
		F	23 20				Schwache, lange Wellen bis 23^h 20^m.
„ 19	II u	i P	1 34 12	3			Tonga-Archipel.
				12	2,5	7	Vertikalseismometer.
		S_N	47,9	12	1	4,5	
		S_E	48,4				
		e	2 15	50	40		Eine Gruppe von Wellen von etwa 1^m Periode.
		e L	ca. 30				Vertikalseismometer.
		M_1	41	19	15	17	
		M_2	48	19	35	20	
		C		18			
		F	4 20				
„ 19	I	e P	8 2,2				
		e	3,2	6		1,1	
		M_1	5,7	15	1,3	2,5	
		M_2	9,4	12	3	3	
		F	20				
„ 19	I u	e L	19 15-40^m				Einige schwache, lange Wellen.
„ 22	III u	i P	18 29 53	9	17	7	Semirtschensk, Kopal. Vertikalseismometer.
		i PR_1	31 55	9	30	15	
		PR_2	32 46	9	15	4,5	
		i	35 27	9	8	3,5	
		i S	36 59	17	45	60	
				9			

Datum	Charakter	Phasen	Zeiten (Greenwich) h m s	Perioden Sekunden	Amplituden A_E μ	A_N μ	Bemerkungen
Dez. 22 Fortsetzung		i S R_1	40 5	9	15	25	
		e L	41,7	60—40			e L nach dem Diagram des 100 kg Pendels.
		M_1	48,2	21	650	700	Die Nord-Süd-Komponente des 1200 kg Pendels schlägt einige Male an die Hemmung.
		M_2	52	15	400	500	
		C		12—17			
		F	21 40				
„ 23	I u	i P	7 13 29				
		S?	23 9				
		e L	34	40			
		M	43	27	4	17	Das Ende ist nicht aufgezeichnet infolge Versagens der Zeitmarkierung.
„ 23	I	e	13 29,1				
			29,9	6	0,6	1,1	
		F	40				
„ 23	II u	i P	17 33 26	12	1	6	Das Vertikalseismometer zeigt 32[m] 24[s] den Einsatz kleiner Wellen und 32[m] 39[s] den starken Haupteinsatz.
		P R_1	35 7	12	1	5	
		P R_2	36 52				
		i S	41 43	9 / 18	30	22	
		P S	ca. 42,7				
		S R_1	ca. 47				
		e L	57,2	30			Vertikalseismometer.
		M_1	59	30	45	60	
		M_2	18 6,5	18	20	90	
		C		12—15			
		F	20 20				
„ 24	I	L	ca. 7[h] 32[m]	13			
„ 26	I u	i P	6 7 7				Wenige schwache Wellen. Herd: Grenze von Chile und Peru. 17000 kg Pendel, Vertikalseismometer außer Betrieb.
		P R_1	10 56				
		i S	17 38	9	30	9	
		S R_1	24,7	14			
		e L	39	30	15	8	
		M	47	21			
		F	8				
„ 26	I u	e L	18 47— 19 10				Schwache, lange Wellen.
„ 27	I	e L	6 50—7[h]	10—12			Einige schwache, lange Wellen.

Mikroseismische Bewegung 1906.

Datum	Januar		Februar		März		April		Mai		Juni	
	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1	5	0,7	6	0,6	7	1	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
2	5	0,6	8	2	6	0,7	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
3	6	0,4	7	0,9	5—6	0,4	5—6	0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
4	8	0,6	5	0,6	?	< 0,3	6	0,6	?	< 0,3	?	< 0,3
5	6—7	0,4	5	0,4	6	0,4	7	0,7	?	< 0,3	?	< 0,3
6	5	0,3	6	0,9	6	0,6	7—8	1	?	< 0,3	?	< 0,3
7	4,6	0,4	7	0,9	6	1,2	7	0,7	?	< 0,3	?	< 0,3
8	?	0,3	6—7	0,9	6—7	3,3	7	1,2	?	< 0,3	?	< 0,3
9	7	0,6	7	1,5	8	4	7	0,9	?	< 0,3	?	< 0,3
10	8	1,2	7	1,8	7	2	7	0,9	?	< 0,3	?	< 0,3
11	7—8	1,2	7	1,8	?	< 0,3	6	0,4	6—7	0,4	?	< 0,3
12	8—9	3	8	0,9	5—6	0,9	6	0,4	7	0,3	?	< 0,3
13	9	5,5	7	1,3	6	1,2	?	< 0,3	6—7	0,3	?	< 0,3
14	8—9	2,5	7	1,8	6—7	0,9	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
15	7	2	7	1,2	6	1,5	7	0,7	?	< 0,3	?	< 0,3
16	7—8	1,5	6—7	0,9	7	0,7	6	1,2	?	< 0,3	?	< 0,3
17	6—7	0,9	7—8	1,2	8	1,3	5—6	0,4	?	< 0,3	?	< 0,3
18	7—8	0,7	7—8	1,2	6	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
19	6	0,7	7	0,7	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
20	?	< 0,3	8	2	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
21	5	< 0,3	8	1,5	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
22	?	< 0,3	6	0,3	?	< 0,3	6	0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
23	4—5	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
24	5	0,6	?	0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
25	6—7	2	4	0,4	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
26	7	2,7	6	0,6	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,3
27	6—7	2,5	6	0,3	7	1,5	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
28	7	2,7	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,6	?	< 0,3	?	< 0,3
29	6	1,2			6	0,9	6	0,9	?	< 0,3	?	< 0,3
30	7	0,6			?	< 0,3	6	0,3	?	< 0,3	?	< 0,3
31	7	1,2			?	< 0,3			?	< 0,3		

Die Ablesungen beziehen sich auf ca. 8^h a. m. M. E. Z.

Mikroseismische Bewegung 1906.

Datum	Juli		August		September		Oktober		November		Dezember	
	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E	T	A_E
	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ	s	μ
1	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	5—6	0,6
2	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,4
3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	5	2,5	6—7	0,7
4	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	5 8	0,9 0,7
5	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	4—5	0,4	7	0,7
6	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	7	2,7
7	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	7	0,4
8	6	0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	7	0,4	?	< 0,3	7—8	3,3
9	6	0,2	?	< 0,3	?	< 0,3	7	2,5	?	< 0,3	8—9	4
10	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,4	7	2
11	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,3	7	0,4
12	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	7	0,3
13	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,3	?	< 0,3	6	1,8	7	0,4
14	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,4	?	< 0,3	?	< 0,3	7	1,2
15	?	< 0,3	?	< 0,3	7	0,4	6	0,9	?	< 0,3	7	0,6
16	?	< 0,3	?	< 0,3	5—6	0,3	6—7	1,2	6	0,2	5	0,3
17	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,2	6	0,6	?	< 0,3	6	0,6
18	?	< 0,3	?	< 0,3	5—6	0,2	6	0,9	6—7	0,6	6	0,6
19	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,3	?	< 0,3	7	0,6	6	0,4
20	6	0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,3	6	0,4	?	< 0,3
21	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	5—6	0,4	5—6	0,4	5	0,3
22	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	7	1
23	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	6—7	0,3	5—6	0,2
24	?	< 0,3	5—6	0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,4	7	0,6
25	?	< 0,3	5—6	0,2	?	< 0,3	7	0,3	6	0,3	7	1,2
26	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	7	0,3	6	1,2	6	0,7
27	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,3	7	0,6	6	0,3	7	1,8
28	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,4	7	0,9	6	0,2	6—7	0,6
29	?	< 0,3	?	< 0,3	6	0,2	8	3,3	6	1,2	6—7	0,3
30	?	< 0,3	?	< 0,3	?	< 0,3	8	2	6	0,9	?	< 0,3
31	?	< 0,3	?	< 0,3			8	0,4			4—5	0,2

Die Ablesungen beziehen sich auf ca. 8[h] a. m. M. E. Z.

Tafelerklärung.

Fig. 1—6 geben die Phase der Hauptwellen wieder, und zwar von zwei Erdbeben (19. XII. 06 und 2. I. 07), die beide in der Nähe der Tongagruppe in der Südsee ihren Herd haben. Die entsprechenden Komponenten sind jeweils unter einander gesetzt, um zu zeigen, in welch weitgehendem Maße die in etwa 16 600 km Herdentfernung erhaltenen Kurvenaufzeichnungen beider Erbeben übereinstimmen. Auf einzelne, bei beiden Erdbeben in gleicher Weise auftretende Wellengruppen ist durch entsprechenden Hinweis *a*, *a*; *b*, *b*; etc. aufmerksam gemacht. Sucht man nach einer Erklärung für die überraschende Uebereinstimmung der Hauptphasen beider Erdbeben, so erscheint es höchst unwahrscheinlich, daß der Verlauf des Erdbebens am Orte des Bebens selber in beiden Fällen während mindestens 30 Minuten soweit übereinstimmend gewesen sein sollte, daß er die Aehnlichkeit der beiden Göttinger Diagramme verursacht hätte. Viel näher liegt es vielmehr anzunehmen, daß das komplizierte, bei beiden Erdbeben aber ziemlich übereinstimmende Bild der Hauptphase als eine Folge der Wellenausbreitung zu betrachten ist, ganz ähnlich, wie auch das Bild der Vorläufer mit seinen verschiedenen Einsätzen nicht durch den Bebenverlauf, sondern durch die Gesetze der Wellenausbreitung seinen eigentümlichen Charakter erhält. Etwas näher darauf eingehen werde ich in einer Arbeit, die gleichzeitig der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vorgelegt worden ist und demnächst erscheinen wird.

Fig. 7 stellt die bebenartige Erschütterung dar, die in Göttingen durch die Explosion in Fort Montfaucon bei Besançon am 16. September 1906 erzeugt worden ist. Die Figur selbst ist die Wiedergabe einer photographischen Vergrößerung, die von dem Diagram des 17 000 kg Pendels hergestellt wurde. Es resultiert so im Ganzen eine 10 000fache Vergrößerung der Bodenbewegung. Die Zeitskala ist mit angegeben. Leider sind die Schwingungen zum Teil nicht mehr einzeln aufgelöst.

Fig. 8 u. 9 stellen Vorphase und den Beginn der Hauptphase des innerasiatischen Bebens am 22. Dezember 1906 dar, und zwar die Registrierung der beiden Horizontalkomponenten des 1200 kg Pendels. Die beiden Diagramme können als Typus der Aufzeichnung eines Bebens aus ca. 5000 km Herdentfernung gelten. Bei solchen Erdbeben treten die Einsätze der reflektierten Wellengruppen besonders deutlich hervor.

Fig. 10 gibt einen Vergleich des ersten Einsatzes (P) der

direkten Longitudinalwellen und des darauf folgenden Einsatzes (PR_1) der einmal an der Erdoberfläche reflektierten Longitudinalwellen beim Karatagbeben 21. Oktober 1907, und zwar einen Vergleich der Aufzeichnungen dieses Bebens in Wien und in Göttingen. Fast genau übereinstimmende Bilder bieten auch die Aufzeichnungen von Graz und Straßburg, die mir in freundlichster Weise zur Verfügung gestellt wurden[1]). Die Nebeneinanderstellung zeigt aufs deutlichste, wie die besondere Form der Vorderfront einer seismischen Störung, die durch den besonderen Verlauf des Auslösungsvorgangs im Herd bedingt ist, bei gedämpft schwingenden Apparaten mit ähnlichen Apparatkonstanten zu fast ganz identischen Aufzeichnungen führt. Hierauf ist übrigens von verschiedenen Seiten wiederholt aufmerksam gemacht worden. Die Uebereinstimmung ist beim ersten Einsatz (P) deutlich bis zum dritten größeren Ausschlag zu verfolgen. Weiterhin verursacht scheints die verschiedene Lage der beiden Stationen zum Herd Abweichungen der beiden Diagramme von einander, und es machen so an Stelle der Besonderheit des Bebenverlaufs die Eigentümlichkeiten der Wellenausbreitung über die Erdkugel sich geltend. Bei dem folgenden Einsatz (PR_1) kann man der Natur der Sache nach keine so weitgehende Uebereinstimmung erwarten, doch ist die Aehnlichkeit der Aufzeichnung von Wien und Göttingen auch hier noch unverkennbar.

Fig. 11 ist eine ähnliche Vergrößerung wie Fig. 8, ebenfalls nach dem Diagram des 17000 kg Pendels, und zwar vom Rheinländer Beben (Ems, Boppard etc.) am 1. September 1906. Auch hier ist die Bodenbewegung etwa 10000fach vergrößert.

Fig. 12 u. 13 geben das verwickelte Bild der Vorläuferphase bis in die Phase der Hauptwellen hinein wieder, wie es für Beben aus einer gewissen Herdentfernung charakteristisch ist. Das vorliegende Erdbeben wurde in Finschhafen gefühlt, hatte also in etwa 13600 km Entfernung von Göttingen seinen Herd. Ueber den Ursprung der verschiedenen deutlich hervortretenden Einsätze wird man erst dann Sicherheit erlangen, wenn es möglich sein wird, von einem derartigen Beben Diagramme zu vergleichen etwa aus 9, 10, 11, 12, 13 und 14 Tausend km Herdentfernung, und zwar Diagramme, in denen die Schwingungen einzeln aufgelöst und die von hinreichend vergrößernden, gedämpft schwingenden Apparaten geliefert sind.

---

1) Ich möchte nicht versäumen, an dieser Stelle den Herren H. Benndorf, V. Conrad und C. Mainka verbindlichsten Dank für ihr Entgegenkommen auszusprechen.

Ueber die Bestimmung von Vertex und Apex nach der Ellipsoidhypothese aus einer geringeren Anzahl beobachteter Eigenbewegungen.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Februar 1908.

§ 1. In dem in diesen Nachrichten (7. Dez. 1907) erschienenen Aufsatz „Über die Eigenbewegungen der Fixsterne“ wurde gezeigt, daß man die scheinbare Verteilung der Eigenbewegungen der Fixsterne an der Sphäre durch Annahme einer „ellipsoidischen“ Verteilung ihrer räumlichen Geschwindigkeiten darstellen kann, über welche sich dann noch der Einfluß der Eigenbewegung der Sonne lagert. Die Aufgabe, aus einer beobachteten Verteilung die Konstanten des „Geschwindigkeitsellipsoids“ und die Eigenbewegung der Sonne abzuleiten, wurde dort für den Fall gelöst, daß man in einem begrenzten Himmelsareal mehrere hundert Sterne beobachteter Eigenbewegung zur Verfügung hat. Bei weiteren Untersuchungen erhob sich das Bedürfnis nach einem Verfahren, welches dieselbe Konstantenbestimmung auch bei spärlicherem Beobachtungsmaterial erlaubt. Es ergab sich die folgende Methode, die rechnerisch von äußerster Einfachheit ist und infolge der Bequemlichkeit, mit der sie Vertex und Apex abzuleiten gestattet, der Ellipsoidhypothese in praktischer Hinsicht — abgesehen von jeder Erwägung über die etwaigen Vorzüge ihres „unitarischen“ Charakters — zur Empfehlung gereichen kann. Die Bearbeitung der Eigenbewegungen der Bradley'schen und Porter'schen Sterne nach diesem Verfahren ist im Gange.

§ 2. Man zerlege die auf die Sphäre projizierten Eigenbewegungen der Sterne eines begrenzten Himmelsareals in eine nach

dem Vertex gerichtete Komponente x und eine dazu senkrechte y. Es sei u_0 die Geschwindigkeit der Sonnenbewegung, σ der Abstand des betreffenden Gebietes vom Apex, φ_0 der Winkel zwischen den Richtungen nach dem Vertex und Apex. Ferner sei $h = u_0 \sin \sigma$ die auf die Himmelssphäre projizierte Komponente der Sonnenbewegung. Für die Häufigkeit einer Eigenbewegung der Komponenten x bis $x + dx$, y bis $y + dy$ ergab sich dann die Formel (l. c. Gleichung (8)):

$$(1) \qquad W = k e^{-a(x + h\cos\varphi_0)^2 - b(y + h\sin\varphi_0)^2} dx\, dy$$

wo a, b, k Konstante sind.

Es soll nun, wie früher: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ gesetzt und die Anzahl der Eigenbewegungen, welche in einen bestimmten Winkelraum φ bis φ' fallen, untersucht werden, dabei soll indessen nicht ein sehr kleiner Winkelraum $\varphi' - \varphi = d\varphi$ behandelt werden, wie bei der früheren Methode, sondern es sollen die Eigenbewegungen aus größeren Winkelräumen zusammengefaßt werden. Denn wenn die Gesamtzahl der zur Verfügung stehenden Sterne gering ist, muß man zu größern Winkelräumen greifen, um einigermaßen verläßliche Häufigkeitsangaben zu erhalten.

Welche Winkelräume nun im Speziellen zusammen zu fassen sind, wird entschieden aus dem rein formalen Gesichtspunkt, daß die Integration von W über den betreffenden Winkelraum einen möglichst einfachen geschlossenen Ausdruck geben soll. Die gewünschte Einfachheit wird erreicht, wenn man für φ und φ' zwei in Bezug auf die Ellipse:

$$a(x + h\cos\varphi_0)^2 + b(y + h\sin\varphi_0)^2 = \text{const.}$$

konjugierte Richtungen wählt.

Solche konjugierte Richtungen werden bekanntlich bestimmt durch die Bedingung:

$$(2) \qquad b \operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\varphi' + a = 0,$$

wofür man unter Einführung des Hülfswinkels σ auch schreiben kann:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}\sigma, \quad & \operatorname{tg}\varphi' &= \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}\sigma' \\ \operatorname{tg}\sigma \,.\, \operatorname{tg}\sigma' &= -1, & \sigma' &= 90^\circ + \sigma. \end{aligned}$$

Man führe schiefwinklige Koordinate ξ, η ein durch die Gleichungen:

$$\xi = x\sqrt{a}\cos\sigma + y\sqrt{b}\sin\sigma, \quad \eta = -x\sqrt{a}\sin\sigma + y\sqrt{b}\cos\sigma.$$

Man erkennt mit Hülfe der Gleichungen (3) sofort, daß die ξ-Axe ($\eta = 0$) die Richtung φ und die η-Axe ($\xi = 0$) die Richtung φ' hat, daß also konjugierte Richtungen zu Axen gewählt sind. Ersetzt man in W die rechtwinkligen durch die schiefwinkligen Koordinaten, so erhält man als Häufigkeit einer Eigenbewegung der schiefwinkligen Komponenten ξ bis $\xi + d\xi$, η bis $\eta + d\eta$:

$$W' = \frac{k}{\sqrt{ab}} e^{-(\xi+\mu)^2 - (\eta+\nu)^2} d\xi \, d\eta,$$

wobei zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \mu &= h(\sqrt{a}\cos\varphi_0\cos\sigma + \sqrt{b}\sin\varphi_0\sin\sigma) \\ \nu &= h(-\sqrt{a}\cos\varphi_0\sin\sigma + \sqrt{b}\sin\varphi_0\cos\sigma) \end{aligned}$$

gesetzt ist. Führt man noch die Hülfsgrößen m und σ_0 ein durch:

$$m\cos\sigma_0 = \sqrt{a}\cos\varphi_0, \quad m\sin\sigma_0 = \sqrt{b}\sin\varphi_0, \tag{4}$$

so schreiben sich μ und ν einfacher:

$$\mu = hm\cos(\sigma_0 - \sigma), \quad \nu = hm\sin(\sigma_0 - \sigma). \tag{5}$$

Um die Anzahl L aller im Winkelraum φ, φ' liegenden Eigenbewegungen zu erhalten, hat man offenbar W' von $\xi = 0$ bis $\xi = \infty$ und von $\eta = 0$ bis $\eta = \infty$ zu integrieren. Das entstehende Integral läßt sich sofort auf das Wahrscheinlichkeitsintegral

$$v(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

zurückführen. Es folgt nämlich durch einfache Zerlegung des Integrationsintervalls in Rücksicht darauf, daß $v(\infty) = 1$ ist:

$$L = \frac{\pi k}{4\sqrt{ab}} [1 - v(\mu)] [1 - v(\nu)].$$

Hiermit ist die Anzahl der zwischen zwei konjugierten Richtungen φ und φ' eingeschlossenen Eigenbewegungen gegeben.

Man sieht unmittelbar, daß man durch bloße Vorzeichenvertauschung von μ und ν auch die Anzahlen für die drei übrigen durch die Ganzstrahlen φ und φ' begrenzten Winkelräume erhält, und zwar findet sich folgende Zusammenstellung $\left(c = \frac{\pi k}{4\sqrt{ab}}\right)$:

	Winkelraum	Anzahl
	φ bis φ'	$L_1 = c\,[1-v(\mu)]\,[1-v(\nu)]$
(6)	φ' bis $\varphi+180^0$	$L_2 = c\,[1+v(\mu)]\,[1-v(\nu)]$
	$\varphi+180^0$ bis $\varphi'+180^0$	$L_3 = c\,[1+v(\mu)]\,[1+v(\nu)]$
	$\varphi'+180^0$ bis φ	$L_4 = c\,[1-v(\mu)]\,[1+v(\nu)]$

Es ergibt sich daraus der einfache Satz:

$$L_1 \cdot L_3 = L_2 \cdot L_4 \tag{7}$$

oder in Worten:

„Zählt man die Anzahlen von Eigenbewegungen ab, welche in die vier durch zwei konjugierte Richtungen begrenzten Winkelräume fallen, so sind die beiden Produkte aus den Anzahlen je zweier einander gegenüberliegender Winkelräume gleich."

Man sieht, daß es auf Grund dieses Satzes immer leicht möglich sein muß, konjugierte Richtungen für die Geschwindigkeitsellipse aufzufinden, und wenn erst konjugierte Richtungen bekannt sind, bietet die Ableitung der gesuchten Konstanten selbst, wie sich alsbald zeigt, keine Schwierigkeit mehr.

Aus (6) ergeben sich noch die später zu benutzenden Relationen:

$$\begin{aligned} v(\mu) &= \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1} = \frac{L_3 - L_4}{L_3 + L_4} = \frac{L_2 + L_3 - L_1 - L_4}{L_1 - L_2 + L_3 + L_4} \\ v(\nu) &= \frac{L_3 - L_2}{L_3 + L_2} = \frac{L_4 - L_1}{L_4 + L_1} = \frac{L_3 + L_4 - L_2 - L_1}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \end{aligned} \tag{8}$$

Es sind ferner noch Spezialfälle hervorzuheben:

1) $\varphi = \varphi_0$, ξ-Axe in Richtung nach dem Apex.

In diesem Falle folgt:

$$\sigma = \sigma_0,\ \ \nu = 0,\ \ \mu = hm,\ \ L_1 = L_4,\ \ L_2 = L_3 \tag{9}$$

und daraus:

$$L_1 + L_2 = L_3 + L_4.$$

Dies ist die von vorne weg ersichtliche Eigenschaft der Richtung nach dem Apex, daß zu beiden Seiten dieser Richtung gleich viel Eigenbewegungen liegen.

2) $\varphi = \sigma = 0$. Die ξ- und η-Axe fallen mit den Hauptaxen der Ellipse zusammen. Die ξ-Axe, der die größere Axe der Ellipse entsprechen möge, gibt die Richtung nach dem Vertex. Es folgt natürlich $\varphi' = 90^0$ und ferner:

(10) $$\mu = h\sqrt{a}\cos\varphi_0, \quad \nu = h\sqrt{b}\sin\varphi_0.$$

§ 3. Auf Grund der hier entwickelten Beziehungen ergibt sich folgender bequemer Weg der Konstantenbestimmung.

Die Richtung der großen Axe der Ellipse möge den Positionswinkel ϑ_0 haben, und es sei:

(11) $$\varphi = \vartheta - \vartheta_0, \quad \varphi' = \vartheta' - \vartheta_0, \quad \varphi_0 = \vartheta_1 - \vartheta_0,$$

sodaß ϑ und ϑ' die Positionswinkel zweier konjugierter Richtungen sind und ϑ_1 der Positionswinkel der Richtung nach dem Apex ist.

Man lege ein rechtwinkliges drehbar gedachtes Axenkreuz durch den Nullpunkt. Die Lage des Axenkreuzes werde immer durch den Positionswinkel ϑ der einen Axe charakterisiert. Man zähle ab, wieviel Eigenbewegungen in jeden der Quadranten des Axenkreuzes fallen, indem man die Quadranten im Sinne wachsender ϑ nummeriert. Die Anzahlen seien:

$$l_1, \; l_2, \; l_3, \; l_4.$$

Diese Abzählung führe man für alle möglichen Lagen des Axenkreuzes aus (in Praxis etwa von 10° zu 10° wachsende Werte von ϑ). Die Anzahlen l erscheinen dann als Funktionen von ϑ. Man suche nun erstens diejenigen Werte von ϑ, für welche

(12) $$l_1 + l_2 = l_3 + l_4$$

ist. Es gibt zwei um 180° verschiedene Werte, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Davon gibt, wie leicht zu sehn, diejenige die Richtung ϑ_1 nach dem Apex, für welche $l_3 > l_1$, $l_2 > l_4$ ist. Man suche zweitens diejenigen Werte von ϑ, für welche

(13) $$l_1 \cdot l_3 = l_2 \cdot l_4$$

ist. Jede solche Richtung ϑ hat offenbar die Eigenschaft, daß sie zu ihrer Normalen konjugiert ist, da von vorneweg die Anzahlen zwischen senkrecht aufeinander stehenden Richtungen abgezählt wurden und nun speziell diejenigen orthogonalen Richtungen herausgesucht sind, welche die Bedingung (7) des Konjugiertseins erfüllen. Da aber konjugierte Richtungen, welche zugleich normal zu einander stehen, die Hauptaxen der Ellipse sind, so hat man damit die Richtung der Hauptaxen herausgefunden.

Man wähle eine beliebige dieser Richtungen aus und bezeichne sie vorläufig mit ϑ_0, wobei wir uns vorstellen wollen, daß diese Richtung grade der größeren Axe der Ellipse entspricht, also nach dem Vertex gerichtet ist. Die Anzahlen in den vier von ϑ_0 aus gezählten Quadranten mögen die speziellen Werte: $l_1 = k_1$, $l_2 = k_2$,

$l_3 = k_3$, $l_4 = k_4$ haben, wobei also gemäß der Bestimmung von ϑ_0: $k_1 \cdot k_3 = k_2 \cdot k_4$ ist. In diesem Falle rechtwinkliger und zugleich konjugierter Durchmesser sind die Anzahlen k auch mit den oben L genannten Zahlen identisch. Die Größe der Hauptaxen findet man daher nach den Formeln (8) und (10) so:

Man rechne:

$$(14) \qquad v(\mu_0) = \frac{k_2 - k_1 + k_3 - k_4}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}, \quad v(\nu_0) = \frac{k_3 - k_2 + k_4 - k_1}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}$$

und entnehme daraus mit Hülfe einer Tabelle des Wahrscheinlichkeitsintegrales die Werte μ_0 und ν_0. Dann hat man nach (10):

$$h\sqrt{a} = \frac{\mu_0}{\cos\varphi_0}, \quad h\sqrt{b} = \frac{\nu_0}{\sin\varphi_0}$$

wobei:

$$\varphi_0 = \vartheta_1 - \vartheta_0$$

ist. Bezeichnet man, wie in dem früheren Aufsatz, die Halbaxen der Ellipse mit α und β, so ist also:

$$(15) \qquad \frac{\alpha}{h} = \frac{\cos\varphi_0}{\mu_0}, \quad \frac{\beta}{h} = \frac{\sin\varphi_0}{\nu_0}.$$

Stellt sich hier heraus, daß $\frac{\alpha}{h} > \frac{\beta}{h}$ ist, so war die Wahl von ϑ_0 richtig getroffen. Ergibt sich aber $\frac{\alpha}{h} < \frac{\beta}{h}$, so hat man ϑ_0 um 90^0 zu vermehren, um die Richtung nach dem Vertex zu erhalten, und im übrigen nur die erhaltenen Werte von α und β zu vertauschen.

Im allgemeinen genügt die Kenntnis von $\frac{\alpha}{h}$ und $\frac{\beta}{h}$; will man aber h noch selbst kennen in Übereinstimmung mit den in dem früheren Aufsatz getroffenen Festsetzungen, so beachte man, daß sich für die Gesamtzahl der Eigenbewegungen N nach (6) ergibt:

$$N = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \frac{\pi k}{\sqrt{ab}} = \pi k \alpha \beta$$

Nach der früheren Festsetzung (l. c. Gl. (11)) ist:

$$k = e^{h^2(a\cos^2\varphi_0 + b\sin^2\varphi_0)} = e^{\mu_0^2 + \nu_0^2},$$

also:

$$N = \pi\alpha\beta e^{\mu_0^2 + \nu_0^2}$$

und daher:

$$\frac{N\mu_0 \nu_0}{\pi \cos\varphi_0 \sin\varphi_0} e^{-\mu_0^2 - \nu_0^2} = h^2,$$

womit h gegeben ist.

Damit ist die Aufgabe der Konstantenbestimmung erledigt.

§ 4. Die vorstehende Methode versagt nur in dem einen Fall, daß die Richtung nach dem Apex mit einer der Hauptaxen der Ellipse nahe zusammenfällt. Dann werden in $\frac{\alpha}{h}$ oder in $\frac{\beta}{h}$ Zähler und Nenner gleichzeitig sehr klein und die Größe der einen, nämlich der senkrecht zur Apexrichtung liegenden, Axe der Ellipse wird unbestimmt. Man muß dann ein Paar anderer konjugierter Durchmesser zur Hülfe nehmen. Man wähle einen beliebigen Positionswinkel ϑ, am besten einen, für den $\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_0)$ nahe gleich dem vorher erhaltenen Werte von $\frac{\alpha}{\beta}$ ist, und suche die konjugierte Richtung ϑ'. Dies geschieht in folgender Weise. Die Gleichung (7) läßt sich so schreiben:

$$\frac{L_1}{L_4} = \frac{L_1 + L_2}{L_3 + L_4}. \tag{17}$$

$L_1 + L_2$ ist die Zahl der zwischen ϑ und $\vartheta + 180^0$ liegenden Eigenbewegungen, $L_3 + L_4$ die der zwischen $\vartheta + 180^0$ und ϑ liegenden. Beide Zahlen sind unmittelbar mit ϑ gegeben. Man muß nun der Reihe nach verschiedene Richtungen ϑ' probieren, indem man für sie die Anzahl der Eigenbewegungen, welche zwischen ϑ und ϑ' liegt (L_1), und die Anzahl zwischen $\vartheta' - 180^0$ und ϑ (L_4) abzählt, und durch Interpolation diejenige Richtung ϑ' bestimmt, für welche das durch (17) gegebene Verhältnis $\frac{L_1}{L_4}$ stattfindet. Sind so konjugierte Richtungen ϑ und ϑ' gefunden, so folgt noch (2) und (11):

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = -\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_0) \cdot \operatorname{tg}(\vartheta' - \vartheta_0), \tag{18}$$

womit das gewünschte Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ bestimmt ist.

§ 5. Beispiel. Für ein Areal, das im ganzen 91 Sterne enthielt, ergab sich folgende Verteilung J der Eigenbewegungen auf je 10^0 Positionswinkel, wobei unter ϑ immer der Anfang des Intervalls angegeben ist.

ϑ	J	ϑ	J	ϑ	J	ϑ	J
0°	0	90°	0	180°	13	270°	0
10	1	100	3	190	6	280	4
20	1	110	3	200	3	290	2
30	2	120	2	210	1	300	0
40	1	130	2	220	1	310	1
50	1	140	7	230	3	320	2
60	0	150	6	240	2	330	4
70	0	160	2	250	0	340	3
80	0	170	8	260	1	350	6

Es wurden nun die Anzahlen von Eigenbewegungen abgezählt, die in die 4 Quadranten eines rechtwinkligen Axenkreuzes fielen, dessen eine Axe durch den Positionswinkel ϑ festgelegt ist. Die erste Zeile der folgenden Tabelle gibt demgemäß die Anzahlen für die Winkelräume 0°—90°, 90°—180°, 180°—270°, 270°—0°, die zweite Zeile für 10°—100°, 100°—190°, 190°—280°, 280°—10° u. s. w. Hiermit wurde dann $l_1 + l_2 - l_3 - l_4$ und $l_1 \cdot l_3 : l_2 \cdot l_4$ gebildet. Es

ϑ	l_1	l_2	l_3	l_4	$l_1 + l_2 - l_3 - l_4$	$\frac{l_1\, l_3}{l_2\, l_4}$
0°	6	33	30	22	−13	0.25
10	6	46	17	22	+13	0.10
20	8	49	15	19	+23	0.13
30	10	49	14	18	+27	0.16
40	10	48	13	20	+25	0.13
50	11	47	13	20	+25	0.15
60	17	43	12	19	+29	0.25
70	23	39	14	15	+33	0.55
80	25	37	17	12	+33	0.96
90	33	30	22	6	+35	4.0
100	46	17	22	6	+35	9.9
110	49	15	19	8	+37	7.8
120	49	14	18	10	+35	6.3
130	48	13	20	10	+31	7.5
140	47	13	20	11	+29	6.6
150	43	12	19	17	+19	4.0
160	39	14	15	23	+15	1.82
170	37	17	12	25	+17	1.05

genügt, ϑ die Werte von 0°—180° durchlaufen zu lassen, da bei Vermehrung von ϑ um 180° erstere Größe nur ihr Vorzeichen wechselt, letztere unverändert bleibt. Für $\frac{l_1\, l_3}{l_2\, l_4}$ würde die Tabelle bis zu 90° schon ausreichen, da diese Größe bei Vermehrung

von ϑ um 90^0 den reziproken Wert annimmt. Man findet durch Interpolation, daß $l_1 + l_2 - l_3 - l_4$ verschwindet für:

$$\vartheta = \vartheta_1 = 3^0.$$

Dies — und nicht 183^0 — ist die Richtung nach dem Apex, weil die Bedingung $l_1 (= 6) < l_3 (= 27)$ und $l_4 (= 22) < l_2 (= 40)$ erfüllt ist. Ferner findet man durch Interpolation der Logarithmen von $\frac{l_1\, l_3}{l_2\, l_4}$, daß diese Größe für $\vartheta = \vartheta_0 = 80^0$ durch 1 geht, und die Anzahlen l nehmen für dieses ϑ die speziellen Werte an:

$$\vartheta_0 = 80^0: \; k_1 = 25, \; k_2 = 37, \; k_3 = 17, \; k_4 = 12.$$

Damit folgt:

$$\varphi_0 = \vartheta_1 - \vartheta_0 = -77^0$$

$$v(\mu_0) = \frac{k_2 - k_1 + k_3 - k_4}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4} = \quad 0.187, \quad \mu_0 = \quad 0.167$$

$$v(\nu_0) = \frac{k_3 + k_4 - k_2 - k_1}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4} = -0.362, \quad \nu_0 = -0.333$$

und hiermit:

$$\frac{\alpha}{h} = \frac{\cos\varphi_0}{\mu_0} = 1.35, \quad \frac{\beta}{h} = \frac{\sin\varphi_0}{\nu_0} = 2.92.$$

Man sieht, daß sich $\beta > \alpha$ ergeben hat. Es sind daher α und β zu vertauschen und es ist ϑ_0 um 90^0 zu vermehren, sodaß das Endresultat wird:

$$\vartheta_0 = 170^0, \; \vartheta_1 = 3^0, \; \frac{\alpha}{h} = 2.92, \; \frac{\beta}{h} = 1.35, \; \frac{\beta}{\alpha} = 0.46.$$

Da hier ϑ_0 und $\vartheta_1 + 180^0$ nahe zusammenfallen und $\frac{\beta}{\alpha}$ schlecht bestimmt ist, wird es gut sein, auch noch das Kontrollverfahren mit Hülfe zweier beliebiger konjugierter Durchmesser anzuwenden. Ich wähle als Ausgangsrichtung $\vartheta = 20^0$, da dann $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_0) = 0.58$ wird, nicht allzuweit von dem Wert $\frac{\beta}{\alpha} = 0.46$ entfernt.

Es folgt dann:

$L_1 + L_2$ (Anzahl der E.-B. zwischen 20^0 und 200^0) $= 57$ $\quad \frac{L_1 + L_2}{L_3 + L_4} = 1.67$
$L_3 + L_4$ („ „ „ „ 200^0 „ 20^0) $= 34$

Ich stelle nun einige Versuche mit verschiedenen ϑ' an:

1) $\vartheta' = 140^\circ$ L_1 (Anzahl der E.-B. zwischen 20° und 140°) = 15, L_4 („ „ „ „ 320° „ 20°) = 16, $\frac{L_1}{L_4} = 0.93$

2) $\vartheta' = 150^\circ$ L_1 („ „ „ „ 20° „ 150°) = 22, L_4 („ „ „ „ 330° „ 20°) = 14, $\frac{L_1}{L_4} = 1.57$

3) $\vartheta' = 160^\circ$ L_1 („ „ „ „ 20° „ 160°) = 28, L_4 („ „ „ „ 340° „ 20°) = 10, $\frac{L_1}{L_4} = 2.80$

Durch Interpolation findet sich, daß $\frac{L_1}{L_4}$ den gewünschten Wert 1.67 annimmt für:

$$\vartheta' = 151^\circ.$$

Es ist daher:

$$\vartheta - \vartheta_0 = 20^\circ - 170^\circ = 210^\circ, \quad \vartheta' - \vartheta_0 = 151^\circ - 170^\circ = 341^\circ,$$

und damit nach (18):

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0.445,$$

sodaß die definitiven Werte der Konstanten sind:

$$\frac{\alpha}{h} = 2.92, \quad \frac{\beta}{h} = 2.92 \cdot 0.445 = 1.30.$$

Regiestrierungen des spezifischen Leitvermögens der atmosphärischen Luft.

Von

H. Schering.

Vorgelegt in der Sitzung am 27. Juli 1907 durch Herrn E. Wiechert.

Vorwort.

Die früheren Versuche[1]) über die absolute Messung des spez. Leitvermögens der atmosphärischen Luft weiterführend, beabsichtigte ich die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von den meteorologischen Elementen durch Registrierung zu untersuchen. Im August 1905 verließ ich aber nach Ausführung der ersten Registrierungen Göttingen, um zur physikalisch-technischen Reichsanstalt nach Charlottenburg überzusiedeln; Ostern 1906 konnte ich während eines kurzen Urlaubes noch einige Versuche anstellen, dank der Freundlichkeit Herrn Professor Wiecherts, der das Stehenbleiben der Anordnung gestattet hatte. Da mir die Ausführung einer Registrierung über eine längere Zeit hin nicht möglich ist, will ich im Folgenden die Anordnung und die damit gemachten Erfahrungen mitteilen.

Die Kosten der Untersuchung wurden von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen bestritten.

Um das spez. Leitvermögen aus den sogenannten Zerstreuungsmessungen berechnen zu können, muß der Strom in den Zerstreuungskörper weit von der Sättigung sein, er muß das Ohmsche Gesetz befolgen: „Ohmscher Strom". Dann ist bei beliebig gestalteten Zerstreuungskörper die unipolare Leitfähigkeit λ:

1) H. Schering. Ann. d. Phys. Bd. 20. S. 174. 1906.

$$\lambda = up\varepsilon \text{ bezw. } vn\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\frac{(Z+C)}{Z}\frac{1}{t_2-t_1}\ln\frac{V_1}{V_2},$$

wobei bedeutet

u bezw. v die spez. Ionengeschwindigkeit der positiven bezw. negativen Ionen,
p bezw. n die spez. Ionendichte,
ε die spez. Ionenladung,
V das Potential des Zerstreuungskörpers zur Zeit t,
Z die Kapazität des Zerstreuungskörpers,
C die Kapazität des Elektroskopes.

Zur Erzielung des Ohmschen Stromes muß der Abstand der beiden Elektroden von einander d. h. des Zerstreuungskörpers von den ihn umgebenden geerdeten Gegenständen, so groß sein, daß bei den verwendeten Potentialdifferenzen das elektrische Feld nur wenig Ionen aus den Raumteilen fortführt im Verhältnis zu den darin vorhandenen Ionen.

Die damals benutzte Anordnung bestand aus einer isoliert aufgehängten Kugel von 5 cm Radius, die mit dem Blättchenträger des senkrecht darunter stehenden Elektroskopes durch einen dünnen etwa 50 cm langen Draht verbunden war. Die Kugel und der Draht bilden zusammen den Zerstreuungskörper, die Zimmerwände oder die Decke und Stützen eines Balkons nebst dem Elektroskopgehäuse bilden die andere geendete Elektrode.

Daß bei dieser Anordnung der Strom das Ohmsche Gesetz befolgte, wurde dadurch bewiesen, daß die Charakteristik mit der Spannung als Abszisse und der Spannungsabnahme in der Zeiteinheit als Ordinate eine Gerade durch den Nullpunkt war. Der Sättigungsstrom im Elektroskop war verschwindend klein gegenüber dem Ohmschen Strom. Ferner wurden die Angaben dieser Anordnung durch Luftbewegung nicht geändert, während bei vorhandener Sättigung die Spannungsabnahme in der Zeiteinheit durch Luftbewegung zunehmen muß.

Aus einigen Reihen gleichzeitiger Messungen der Leitfähigkeit mit diesem Zerstreuungsapparat und der spez. Ionendichte mit dem Ebert-Gerdienschen Ionenaspirator ergaben sich Ionengeschwindigkeiten von 0,85 bis 1,04 cm/sec. für positive, und 0,96 bis 1,30 cm/sec. für negative Ionen (berechnet für ein Feld von 1 Volt/cm). Werte, wie sie weiterhin auch Mache und Schweidler[1]) nach der Macheschen Methode gefunden haben.

Da bei dem Elster-Geitelschen Apparat ein beträchtlicher Teil

1) Mache u. Schweidler, Phys. Ztschr. 6. S. 71—73. 1905.

des Stromes gesättigt ist, muß bei ihm der sogenannte Zerstreuungskoeffizient, der prozentuale Ladungsverlust des Zerstreuungskörpers in der Minute, zu klein ausfallen, Bei der neuen Anordnung wurden Zerstreuungskoeffizienten von 5 bis 10 % im Durchschnitt gefunden, eine Messung beanspruchte nur etwa 5 Minuten [1]). Leider hat die neue Anordnung einen großen Vorteil der Elster-Geitelschen verloren, die kompendiöse Form; es ist nicht gelungen einen leicht transportablen Apparat zusammenzustellen. Der Gerdiensche Aspirationsapparat für Leitfähigkeitsmessungen [2]) in seiner neuen Form hat sich unter den schwierigsten Verhältnissen, bei Ballonfahrten, so vorzüglich bewährt, daß ein Bedürfnis für einen anderen Reiseapparat, soweit er die Beobachtungszeit nicht noch weiter beträchtlich verkürzt, wohl auch nicht vorliegt.

I. Zerstreuungs-Apparat.

Anordnung des Zerstreuungskörpers. Als Stationsapparat aber dürfte sich die neue Anordnung wegen ihrer großen Einfachheit und Unabhängigkeit von äusseren Einflüssen gut eignen, besonders auch zur Registrierung der Leitfähigkeit. Hier können die Dimensionen des Zerstreuungskörpers ohne Schwierigkeiten groß gewählt werden. Die Isolationsverluste machen sich dann weniger geltend.

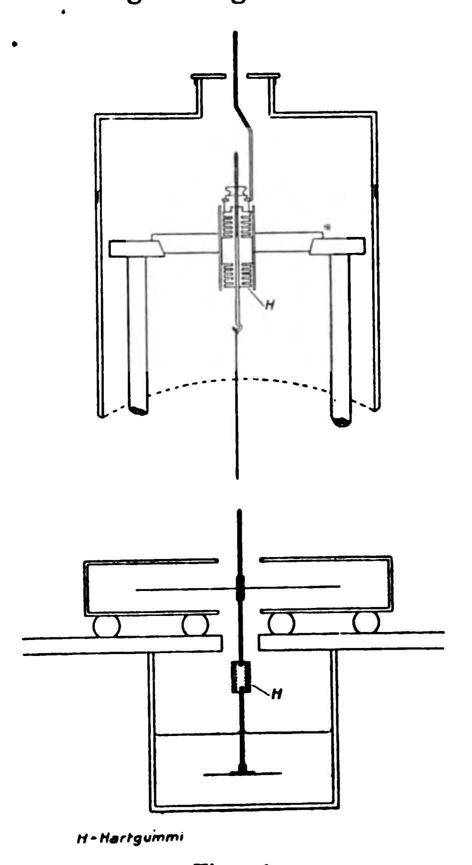
Folgende Anordnung erwies sich als zweckmäßig. Als Zerstreuungskörper dient ein dünner horizontal ausgespannter Draht, das Feld eines solchen wird durch in die Nähe gebrachte geerdete Gegenstände wenig beeinträchtigt; als andere Elektrode und gleichzeitig zum Schutz gegen das Erdfeld umhüllt ihn ein weiter konzentrischer Cylinder aus Drahtnetz. Wie notwendig ein guter Schutz gegen das Erdfeld ist, zeigt das zwar selbstverständliche aber recht instruktive Ergebnis folgenden Versuches. Im Freien wurde zwischen zwei Pfählen ein 2,5 m langer dünner Draht in etwa 2 m über dem Boden isoliert ausgespannt und durch einen 1 m langen dünnen Draht mit dem darunter stehenden Elektroskop verbunden. Bei positiver Ladung auf 140 Volt war der Ladungsverlust sehr klein, bei negativer Ladung dagegen betrug derselbe etwa 10 % in der Minute, während gleichzeitige Messungen auf

1) Bei den in der zitierten Arbeit angeführten Messungen wurde die Zeit durch Vergrößern der Kapazität des Elektroskopes absichtlich auf die für den Ionenaspirator notwendige Beobachtungszeit verlängert.

2) H. Gerdien. Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse 1905. Heft 3. Z. f. Instrumentenkunde. 26. S. 34. 1906.

dem ganz in der Nähe befindlichen Balkon ziemlich gleiche positive und negative unipolare Leitfähigkeiten ergaben; der ausgespannte Draht befand sich eben in einer Potentialfläche des Erdfeldes von etwa + 140 Volt.

Elektrometer. Zunächst war festzustellen, wie weit der Abstand des Drahtnetzzylinders von dem Zerstreuungsdraht sein mußte, damit der Strom nicht gesättigt wurde. Zu diesen und den späteren Versuchen benutzte ich ein Elster-Geitelsches Quadrantenelektrometer, an dem für die vorliegenden Zwecke einige Aenderungen vorgenommen waren (Figur 1). Die Quadranten lagen an einer Hülfsbatterie, deren Mitte und das Gehäuse an Erde, die Nadel an der zu messenden Spannung. Um die Kapazität der Nadel möglichst herabzudrücken, wurde die Dämpfung von der Nadel isoliert und der Aufhängungskopf stark verkleinert. Beide Isolationen wurden aus Hartgummi mit tiefen schmalen Nuten hergestellt; die der Aufhängung wurde noch mit einem bis auf $^1/_2$ mm schließenden Messingrohr umgeben, um die Luftzirkulation in die Nuten zu erschweren (siehe Fig.). Die Kapazität des so veränderten Elektrometers wurde mit der früher erwähnten Kugel von 5 cm Radius und dem 50 cm langen dünnen Draht zu 11,1 cm, ferner mit einem Cylinderkondensator zu 11,0 cm durch Ladungsteilung bestimmt. Der Verlust im Elektrometer betrug etwa 4 Volt in der Stunde.



Figur 1.

Einfluß des Schutzdrahtnetzes auf den Stromverlauf. Die Untersuchungen über die Beeinflussung des Stromes durch das Schutzdrahtnetz mußten im Zimmer vorgenommen werden, da im Freien die Leitfähigkeit der Luft nicht lange genug konstant bleibt. Zunächst wurde ein 3 m langer und 0,14 mm starker

Draht zwischen dem Elektrometer und einem Hartgummiisolator horizontal etwa 1,20 m über dem Boden ausgespannt und alle Gegenstände aus der Umgebung des Drahtes entfernt. Die Empfindlichkeit des Elektrometers betrug 0,604 Volt für 1 Skalenteil. Der Draht wurde auf 300 Volt geladen; die Spannung war etwa 3mal größer als sie später zu den Leitfähigkeitsmessungen benutzt werden sollte, etwaige Abweichungen vom Ohmschen Stromverlauf mußten sich bei den höheren Spannungen dann besonders bemerklich machen. Mit einer Springuhr wurde die Zeit, in der das Elektrometer um 20 oder 10 Skalenteile sank, gemessen und aus den Spannungsabnahmen in der Sekunde und den zugehörigen mittleren Spannungen die Charakteristik gezeichnet. Um die Dauer einer solchen Messungsreihe abzukürzen und sich von den stets vorhandenen langsamen Aenderungen der Leitfähigkeit im Zimmer unabhängig zu machen, wurde nach der Bestimmung eines Punktes der Charakteristik der Draht durch einen darangehaltenen Papierstreifen um etwa 60 Volt entladen und wieder eine Messung ausgeführt und so fort, sodaß 4 Punkte in höchstens 6 Minuten bestimmt wurden.

Die so ermittelten Punkte lagen stets auf einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt, der Strom an dem frei ausgespannten Draht ist also Ohmscher Strom.

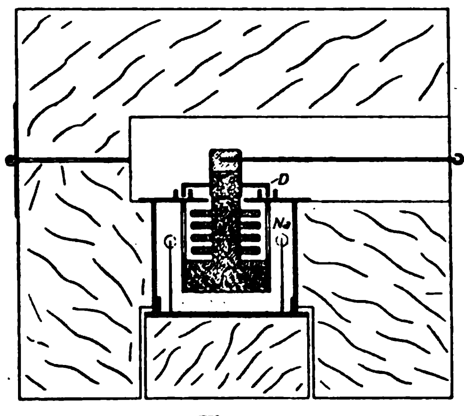
Der Draht wurde dann mit einem geerdeten koaxialen Cylinder von 36 cm Durchmesser umgeben, der von sechs 1 mm starken parallel ausgespannten Drähten gebildet wurde; oberhalb 70 Volt krümmte sich die Charakteristik mit zunehmender Spannung nach der Abszissenaxe zu, der Strom ist oberhalb 70 Volt also teilweise gesättigt.

Darauf wurde ein koaxialer geerdeter Cylinder von 100 cm Durchmesser aus 30 parallel gespannten Drähten bestehend hergestellt. Bei dieser Anordnung war die Charakteristik des Stromes von 300 Volt abwärts wieder eine Gerade durch den Nullpunkt. Der Strom ist also Ohmscher Strom.

Aufbau des Zerstreuungssystems im Freien. Auf der Meteorologischen Wiese des Geophysikalischen Institutes wurde nach diesen Erfahrungen an die „Luftelektrische Hütte“ nach Norden zu eine Art Laubengang von 20 m Länge aus Drahtgeflecht gebaut, der so hoch war, daß man sich darin noch bequem bewegen konnte. Pfahljoche von etwa 1,90 m Höhe und 1,50 m Breite wurden in den Boden gerammt und oben und an den Seiten mit 1,50 m breitem Drahtgeflecht mit 6eckigen Maschen von 6 cm Weite bespannt. Das Drahtnetz war mit der Erdleitung der luftelektrischen Hütte, einem in den Boden eingegrabenen Draht ver-

bunden; die Maschenweite wurde so groß gewählt, um eine möglichst geringe Ionenadsorption am Drahtnetz zu haben.

Am Ende des Ganges etwa $1/2$ m von der abschließenden Drahtwand entfernt wurde auf einem Pfahl in etwa 1 m Höhe über dem Boden eine gegen schnelle Temperaturschwankungen durch Holzpackung geschützte Isolation aus Hartgummi aufgestellt. (Siehe Fig. 2.) Bei den Registrierungen im August 1905[1]) war noch nicht der Deckel D angebracht; des Nachts und bei plötzlichen Regenfällen versagte die Isolation für einige Stunden, das an den Nadeln aufgespießte Natrium Na wurde ziemlich schnell verbraucht. Um die Luftzirkulation im Innern zu erschweren wurde Ostern 1906 der Deckel angebracht, der mit seinem Rand in zwei Ringe eingreift ohne sie zu berühren. Vor der Benutzung wurde der Isolator für sich 12 Tage lang im Freien geprüft, indem er auf-



Figur 2.

geladen und am anderen Tage die noch vorhandene Ladung gemessen wurde. Er hielt sich tadellos, das Natrium wurde sehr wenig oxydiert. Eine zweite ähnliche Isolation ohne Holzpackung befand sich im Inneren der Hütte, ein etwa 40 cm langes und 4 cm weites Messingrohr führte durch die Wand der Hütte nach außen. Zwischen diesen beiden Isolationen wurde der 0,140 mm starke Zerstreuungsdraht ausgespannt, sodaß er das Messingrohr nicht berührte und in der Mitte des Ganges hing.

Schirmwirkung des Drahtnetzes. Mit Hülfe von Poloniumsonden und Wasserspritzkollektoren wurde untersucht, in-

1) Mitte August verließ ich Göttingen, die Registrierungen Ostern 1906 wurden während eines Urlaubes ausgeführt.

2) Der Isolator ist von der Firma Spindler u. Hoyer Göttingen angefertigt, seine Kapazität betrug etwa 8 cm.

wieweit das weitmaschige Drahtnetz das Erdfeld abschirmte. Die Spritzkollektoren bestanden aus einem starkwandigen Wasserreservoir von 7 cm Höhe und 4,5 cm Durchmesser, das mit einer verschraubbaren Einfüllöffnung, einem Fahrradventil und einem ca. 35 cm langen horizontalen Ausflußrohr versehen war, am Ende Ende des Ausflußrohres sass eine Kappe mit einem Boden aus Kupferfolie, der eine sehr feine Oeffnung in der Mitte hatte. Das Reservoir wurde zur Hälfte mit filtriertem Wasser gefüllt und die Luft in ihm mit einer Fahrradpumpe stark komprimiert, das Wasser spritzte dann in einem sehr feinen Sprühregen in 5—10 Minuten aus. Die vierkantige Kappe konnte mit einem Schlüssel abgeschraubt und gegen eine andere ausgetauscht werden, wenn sich das feine Loch einmal verstopfte.

Der Spritzkollektor bezw. die Poloniumsonde wurde auf einen Hartgummistab gesteckt und mit dem Quadrantenelektrometer, das auf eine Empfindlichkeit von 20 Skalenteilen für 1 Volt gebracht war, verbunden; das Gehäuse des Elektrometers und die Mitte der Hülfsbatterie waren mit dem Drahtnetz und der Erdleitung verbunden. Nachdem der Hartgummistab über einer Flamme von Reibungselektrizität befreit war, wurde das Innere des Drahtnetzganges sondiert, es zeigte sich, daß das Erdfeld vollständig genügend abgeschirmt war; nur durch die Maschen des oberen Drahtnetzes bogen sich die Potentialflächen des Erdfeldes ein wenig hinein, etwa 5 cm unterhalb einer Masche betrug das Potential etwas über + $^{1}/_{10}$ Volt; außerhalb des Drahtnetzes wurde ein Gefälle von etwa + 80 Volt pro Meter gemessen. Das Drahtgeflecht an den Seiten reichte, da es nur 1,50 m breit war, nicht bis an den Boden; aber auch hier wurde festgestellt, dass die Potentialflächen des Erdfeldes nicht tiefer eindrangen.

Leitfähigkeit innerhalb und außerhalb des Schutznetzes. Um zu ermitteln, ob das Drahtnetz die Ionendichte im Inneren beeinflußte, wurden gleichzeitig Messungen mit dem Aspirations-Leitfähigkeitsapparat, den mir Herr Dr. Gerdien in liebenswürdiger Weise zur Verfügung stellte, außerhalb des Drahtnetzes und Zerstreuungsmessungen mit der Kugel bezw. mit einem ausgespannten Drahte innerhalb des Drahtnetzes vorgenommen. Die mit dem Gerdienschen Apparat gefundenen Werte waren im Durchschnitt um etwa 20 % größer als die nach der Zerstreuungsmethode im Inneren des Ganges gemessenen; dieselbe Differenz der durchschnittlichen Angaben der beiden Apparate wurde aber auch gefunden, wenn beide innerhalb des Drahtnetzes standen. Diese Diskrepanz hat sich auch früher schon bei den durchschnittlichen Ionengeschwin-

digkeiten gezeigt, die Gerdien und ich — allerdings nicht bei synchronen Messungen — gefunden haben; die Ursache ist nicht aufgeklärt[1].

Kapazität des Zerstreuungsdrahtes. Die wirksame Länge des Zerstreuungsdrahtes gemessen vom Rande des aus der Hütte herausragenden Messingrohres bis zur Isolation am andern Ende des Ganges, betrug 1960 cm, ihre Kapazität berechnet sich bei Annahme eines geerdeten konzentrischen Cylinders von 75 cm Radius zu 106 cm. bei einem solchen von 100 cm Radius zu 102 cm; das Mittel 104 cm ist für luftelektrische Zwecke ausreichend genau.

Berechnung des Stromes. Wird ein Zerstreuungskörper von dieser Kapazität Z auf ein Potential V von etwa 100 Volt geladen, so fließt in ihn in der Sekunde bei der unipolaren Leitfähigkeit λ der Luft — im Durchschnitt 0.7×10^{-4} sec^{-1} — ein Ionenstrom i:

$$i = 4\pi\lambda VZ = \text{ca. } 3 \times 10^{-2}$$

elektrostat. Einheiten oder rund 1×10^{-11} Ampere.

II. Erste Registrierperiode.

Vorversuche unter Verwertung eines Widerstandes. Der Zerstreuungsdraht liefert einen Strom, der im Vergleic hzu den sonst bei luftelektrischen Messungen vorkommenden sehr groß ist, leider ist er aber doch noch nicht mit den empfindlichsten Galvanometern gut meßbar. Die Registrierung mit dem Galvanometer wäre die ideale; man würde ein kontinuierliches Bild des Stromverlaufes erhalten. Durch Registrierung des Spannungsabfalles an einem bekannten Widerstande der zwischen dem Zerstreuungsdraht und die Stromquelle geschaltet war, versuchte ich eine — wenn auch nicht so vollkommene — kontinuierliche Aufzeichnung der Leitfähigkeit zu bekommen.

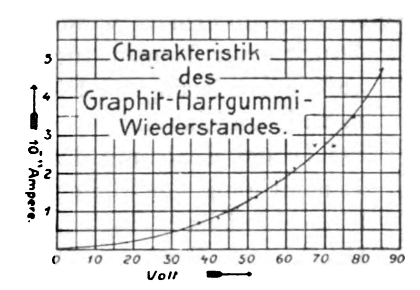
Zuerst beabsichtigte ich die von Gerdien[2]) zur Registrierung der Niederschlagselektrizität hergestellten hohen Widerstände zu benutzen, sie bestanden aus mit Graphit eingeriebenen Hartgummistreifen. Eine in ähnlicher Weise wie an dem Zerstreuungsdraht ausgeführte Stromuntersuchung ergab jedoch, wie Figur 3 zeigt, daß bei den hier notwendigen Spannungen der Strom mit wach-

1) Vielleicht beruht der Unterschied zum Teil darauf, daß bei der Berechnung des Capacitätsfactors des Gerdienschen Apparates nur der innere cylindrische Stab als wirksame Elektrode angesetzt ist unter Vernachlässigung des Stabträgers.

2) Gerdien, Phys. Zeitsch. 4, 1903, S. 840.

sender Spannung sehr viel schneller als linear zunimmt. Da diese Widerstände nicht sehr konstant sind und einen starken Temperaturkoeffizienten haben, müßte also des öfteren eine Nachmessung der Charakteristik erfolgen. Es wurde deshalb von ihrer Benutzung Abstand genommen.

Verwertung einer Uranzelle. Rutherford[1]) hat verschiedentlich bei der Untersuchung radioaktiver Substanzen zur Eichung des Elektrometers als Standard einen Plattenkondensator benutzt, auf dessen eine Fläche Urannitrat gebracht war, das die Luft zwischen den Platten ionisierte. Von Herrn Dr. Gerdien freundlicher Weise hieran erinnert, wählte ich statt des hohen



Figur 3.

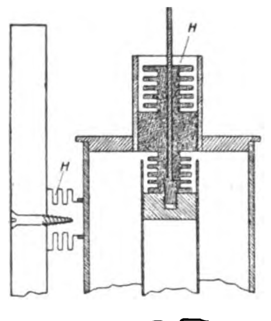
Widerstandes eine solche Ionisierungszelle. Das Urannitrat gibt keine Emanation ab, die stark ionisierenden α-Strahlen werden im Inneren der Zelle absorbiert, die durchdringenden Strahlen ionisieren sehr wenig, sodaß eine Beeinflussung der natürlichen Ionisation der zu untersuchenden atmosphärischen Luft nicht zu befürchten war. Bei einem Vorversuch wurde die innere Mantelfläche eines geschlossenen Cylinders von 5 cm Weite und 25 cm Länge mit Wasserglas bestrichen und mit fein gepulvertem Urannitrat bestäubt. Auf einer Hartgummi-Isolation am Boden des Cylinders, durch die ein Draht nach außen führte, konnten koaxial 3 verschieden starke Messingstäbe I, II, III von je 22 cm Länge befestigt werden. Eine Spannung wurde an den äußeren Cylinder gelegt und die Aufladung der mit dem Elektrometer verbundenen Stäbe in der Zeiteinheit gemessen. Es ergab sich, daß der Strom für Spannungen von 50 bis 300 Volt nur um wenige Prozente wuchs, also völlig gesättigt war. Die Ionisierungszelle liefert also einen von der Spannung unabhängigen Strom. Bei den verschiedenen Elektroden waren bei etwa 100 Volt die Ströme:

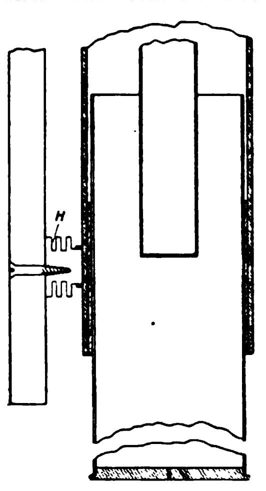
---

1) Rutherford, Radioaktivitay. Seite 76. Cambridge 1904.

Nr.	Durchmesser der Elektrode	Strom in 10^{-11} Ampere
I	0,7 cm	2,94
II	2,0 „	2,88
III	3,0 „	2,30

Zwischen den Strömen bei den Elektroden I und II ist ein weit geringererer Unterschied als zwischen II und III. Bei II sind die α-Strahlen von der Wand des Cylinders in der Luftschicht von $1^1/_2$ cm Dicke vollständig absorbiert, während dieses bei III bei einer 1 cm starken Luftschicht noch nicht der Fall ist; die geringe Zunahme des Stromes bei I erklärt sich durch eine geringe Ionisation durch die durchdringenderen Strahlen. Wenn die α-Strahlen in der Luftschicht vollständig absorbiert werden, kann eine durch Druck oder Temperaturänderung hervorgerufene Aenderung der Dichte der Luft keinen merklichen Einfluß haben. In der Tat betrug bei II dei Erhöhung des Stromes bei einer Erniedrigung der Temperatur von 19° C. auf 9° noch nicht $^1/_2$ %, eine Größe die an der Grenze der Meßgenauigkeit steht.





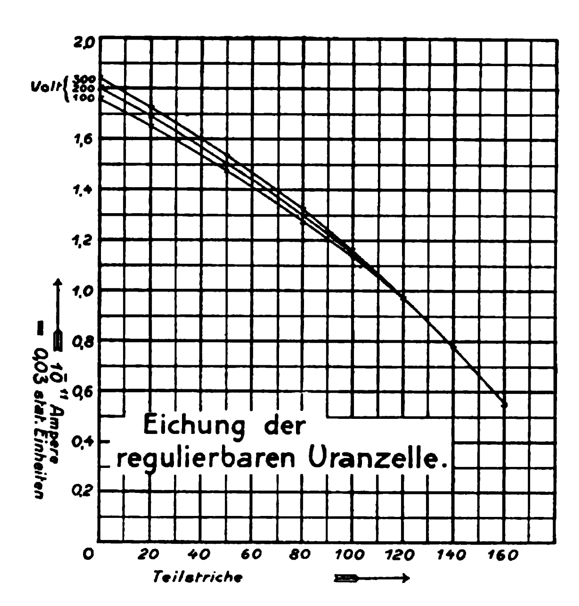
Figur 4.

Regulierbare Uranzelle. Da diese Stromstärke für den vorher beschriebenen Zerstreuungskörper zu groß war, wurde eine neue etwas kleinere Uranzelle gebaut, bei der die Strahlung der Wand durch einen zweiten beweglichen Cylinder in beliebigem Maße abgeblendet werden konnte, wie aus der Figur 4 ersichtlich, so daß der Strom verändert werden konnte. Die Weite des äußeren Cylinders betrug 43 mm, die des Abblendrohres 40 mm, die Stärke des inneren Stabes 15 mm; die Länge der Uranbedeckten Mantelfläche 20 cm. Auf dem beweglichen Rohr war eine Teilung angebracht. Die Kapazität betrug etwa 26 cm bei Teilstrich 120. Bei der Eichung wurde eine Kapazität von 160 cm hinzugeschaltet, um die geringen Kapazitätsänderungen bei Verschiebung des Abblendrohres unwirksam zu machen. Die Eichkurve für 100, 200 und 300 Volt ist in Figur 5 wiedergegeben.

Berechnung der Leitfähigkeit der Luft. Wird die innere Elektrode der Uranzelle mit dem Zerstreuungsdraht ver-

bunden und der äußere Cylinder an eine Spannung von einigen hundert Volt gelegt, so ladet sich die innere Elektrode mit dem Zerstreuungsdraht bis zu der Spannung auf, bei der der Strom am Zerstreuungsdraht gleich dem Strom in der Uranzelle wird. Sei diese Spannung V, die Kapazität des wirksamen Zerstreuungsdrahtes Z und der Strom in der Uranzelle i, so ist die unipolare spez. Leitfähigkeit der Luft λ

$$\lambda = \frac{i}{4\pi . V . Z}.$$



Figur 5.

Der Strom i ist der Uranzelle bei der betreffenden Einstellung eigentümlich, kann also als konstant und bekannt angesehen werden. Es variiert aber die Spannung V des Zerstreuungsdrahtes umgekehrt proportional mit λ, und es ist nur nötig die Spannung V zu registrieren, um den Gang der Leitfähigkeit λ zu erfahren. *Diesen Umstand verwertete ich für die Registrierungen der ersten Periode.*

Registriereinrichtung. Im Innern der Hütte beim Zerstreuungsdraht wurde das auf Seite 4 beschriebene Elektrometer erschütterungsfrei aufgestellt und seine Nadel mit dem Zerstreuungsdraht verbunden. Dies geschah ohne weitere Isolatoren durch Dräthe, die zur Vermeidung von Zerstreuung durch Messingröhren von 15 mm Weite hindurch gespannt waren.

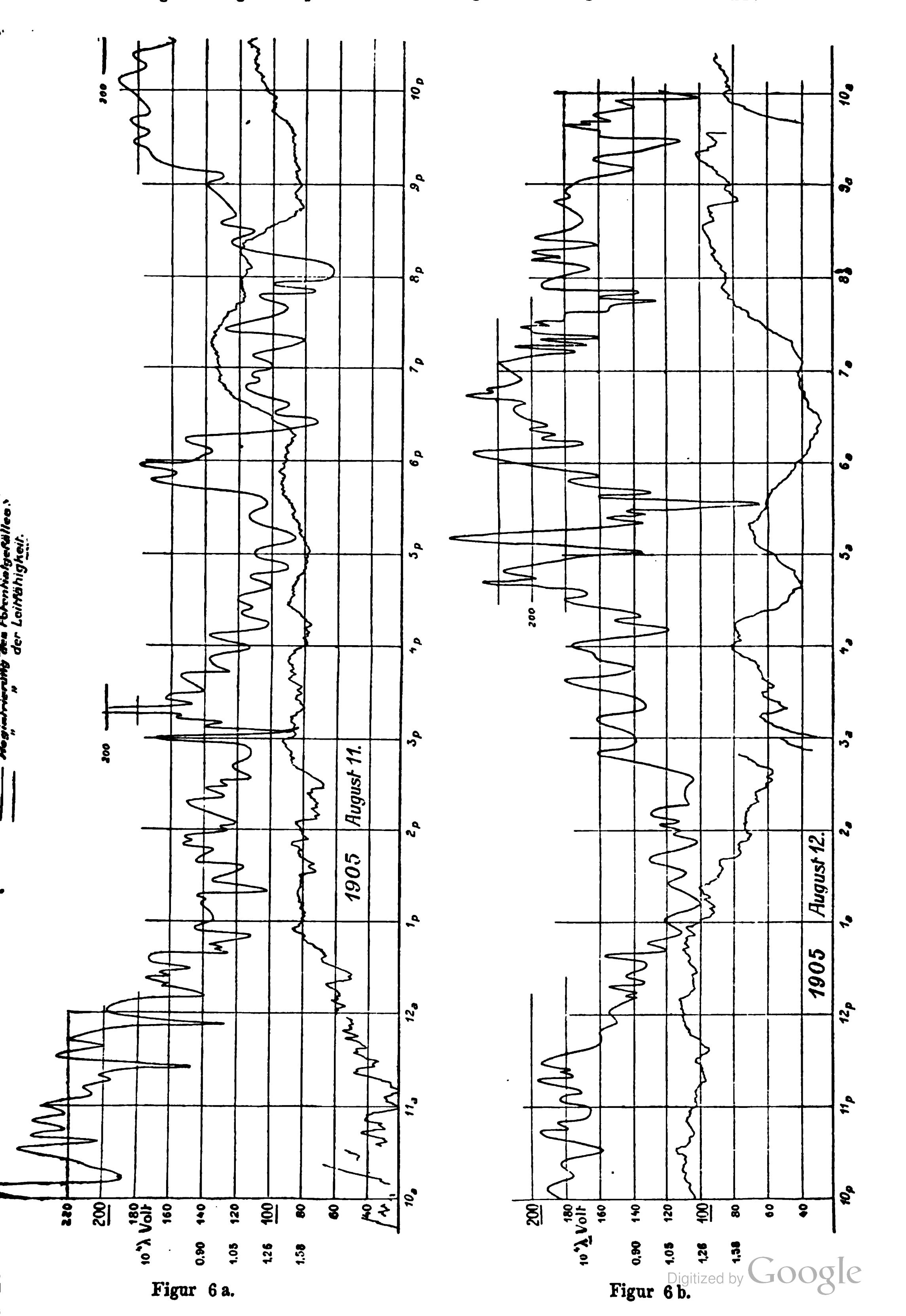
Das von dem Elektrometerspiegel reflektierte Bild eines beleuchteten Spaltes wurde durch ein Brillenglas und eine Cylinderlinse als Lichtpunkt auf eine mit Bromsilber-Papier bespannte Trommel von 76 cm Umfang geworfen, die durch ein Uhrwerk einmal in 24 Stunden herumgedreht wurde. Mit Hilfe eines festen Spiegels wurde gleichzeitig eine Gerade aufgenommen, die in bekanntem kleinen Abstand von der Ruhelage des Elektrometers verlief. Ein an dem Minutenzeiger einer Weckuhr befestigter Pappstreifen deckte alle Stunden den Spalt während $1^1/_2$ Minuten ab, sodaß in der Registrierung kleine Lücken als Stundenmarken entstanden.

Die Quadranten des Elektrometers waren mit einer in der Mitte geerdeten Batterie von 20 Bornhäuser-Accumulatoren verbunden, das Elektrometergehäuse lag an Erde. Der äußere Cylinder der Uranzelle war an den positiven Pol einer Batterie von 400 kleinen Danielelementen in U-Röhrchen angeschlossen, der negative Pol lag an Erde, (die Zink- und Kupfersulfatlösungen waren mit Gelatine versetzt, um das Verdunsten und auscrystallisieren zu verhindern.) Das Abblendrohr der Uranzelle war zuerst auf Teilstrich 120 eingestellt, sodaß der Strom $0{,}98 \times 10^{-11}$ Ampere betrug, da in den Augusttagen die Leitfähigkeit aber durchschnittlich etwas größer als 1×10^{-11} war, so wurde um größere Amplituden zu erhalten vom 5. August an das Abblendrohr ganz zurückgezogen, so daß der Strom $1{,}85 \times 10^{-11}$ Ampere betrug. Die unipolare Leitfähigkeit in elektrostat. Maas berechnet sich dann aus der genauen Spannung V in Volt des Zerstreuungsdrahtes

$$\lambda = \frac{1.26}{V} \times 10^{-2}$$

Die Registrierungen. Am 2. August 1905 begannen die Registrierungen; mehrfach besonders des Nachts versagte die Isolation, die wie früher bemerkt, damals noch nicht genügend gegen Luftzirkulation geschützt war. Einigemale störten auch Spinnen, die gerade in dieser Jahreszeit eine gesteigerte Tätigkeit ausüben. Die Einführungsöffnungen der Isolationen konnten durch angehängte kleine Fläschchen mit Schwefelkohlenstoff leicht geschützt werden, aber bisweilen zogen oder vielmehr schossen die Spinnen ihre Fäden von dem Drahtnetz nach dem dünnen Zerstreuungsdraht, oft in horizontaler Richtung.

In der kurzen Zeit wurde daher keine völlig störungsfreie Aufnahme erhalten. Die relativ beste, die vom 11./12. August 1905 ist hier wiedergegeben, der Hauswart und Mechaniker des Instituts Herr Hilke bediente den Apparat während meiner Abwesenheit in



Figur 6 a.

Figur 6 b.

diesen Tagen sehr sachgemäß. Die untere dünn ausgezogene Kurve in Fig. 6, a, b ist die registrierte Spannungskurve des positiv [1]) geladenen Zerstreuungsdrahtes. Meßlinien von 20 zu 20 Volt sind eingezeichnet und die diesen Spannungen entsprechenden Leitfähigkeiten beigefügt. Die Isolation hat nur von 11. Aug. 1p bis 12. Aug. 2a funktioniert, in der Nacht vom 10. zum 11. Aug. hatte es stark geregnet, wovon sich die Isolation augenscheinlich erst nach längerer Zeit erholte, am Morgen des 12. Aug. ist vermutlich Condensation durch Abkühlung die Ursache des Versagens. Die Leitfähigkeit hat an diesem Tage durchschnittlich einen hohen Betrag. Die Sonne schien bis $4^1/_2$ p ununterbrochen, einige Cumuli waren am Himmel, abends bezog sich derselbe vollständig. Die Windregistrierung zeigte tagsüber gleichmässigen Westwind von etwa 8 m/sec, der Nachts auf 4,7 m/sec abflaute.

Da die registrierte Spannungskurve umgekehrt proportional der Leitfähigkeit ist, so eignet sich diese Registrierung besonders zur Vergleichung mit dem Verlauf der Potentialgefälle von dem Gesichtspunkte aus, daß wie im allgemeinen bei hohem Potentialgefälle geringe Leitfähigkeit herrscht (im Winter) und umgekehrt (im Sommer) so auch bei den täglichen Schwankungen ein ähnlicher Zusammenhang also eine Konstanz des Vertikalstromes bestehen könne.

In Fig. 6, a, b ist die stärker ausgezogene Kurve das von einem Benndorfschen Apparat neuerer Konstruktion, der in etwa 150 m Entfernung von der Luftelektrischen Hütte an der Nordseite des Hauptgebäudes des Institutes aufgestellt war, registrierte Potentialgefälle. Bei der Unvollständigkeit der Leitfähigkeitkurven infolge der Isolationsstörungen und der geringen Anzahl der Aufnahmen ist ein Verfolgen eines solchen Zusammenhanges leider nicht möglich gewesen.

Man sieht an den Stellen, wo die Isolation versagt hat, daß längere Zeit vergeht bis der Draht sich völlig wieder aufgeladen hat. Die Uranzelle wirkt in dieser Beziehung ungünstiger als ein das Ohmsche Gesetz befolgender Widerstand. Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}$ die Batteriespannung mit V die Spannung des Zerstreuungsdrahtes, welche dem stationären Zustand, bei der herrschenden Leitfähigkeit der Luft entspricht, mit x den Bruchteil dieser Spannung, bis auf welchen der Draht zu Zeit t aufgeladen ist

1) Um ein Niederschlagen von radioaktiver Substanz aus der Luft zu vermeiden. Aber K. Kurz (Diss. Giessen 1907, Arch. d. Phys. Bd. 24 S. 925, 1907) berechnet, das ein radioaktiver Niederschlag bei Ohmschem Strom keine merkliche Wirkungen ausübt.

mit C die Capacität der gesamten Anordnung, mit W den konstanten Ohmschen Widerstand, mit i den Strom der Uranzellen, so ist bei dem Ohmschen Widerstand

$$t = \frac{CV}{\frac{\mathfrak{V}}{W}} \ln \frac{1}{x}$$

bei der Uranzelle

$$t = \frac{CV}{i} \ln \frac{1}{x}$$

Wenn der Ohmschen Widerstand so bemessen ist, daß V ungefähr $\frac{1}{2}$ $\mathfrak{V}$ beträgt, so ladet der Ohmsche Widerstand gerade doppelt so schnell auf als die Uranzelle. Bei der Uranzelle dauert ein Aufladen von 0 bis auf 10% der zu erreichenden Spannung etwa 35 Minuten.

Die Anordnung mit der Uranzelle eignet sich daher nur für langsame Registriergeschwindigkeit, die für die nächstliegendsten Untersuchungen auch ausreichend ist, für manche Zwecke ist die Unterdrückung zahlreiche Einzelheiten zugunsten der Uebersichtlichkeit nicht unerwünscht, ein großer Vorzug besteht darin das das Reciproque der Leitfähigkeit registriert wird, wodurch der Vergleich mit dem Verlauf des Potentialgefälles und des Barometerstandes ohne Umrechnung anzuführen ist[1]).

Bemerkung über die Registriereinrichtung. Die Registrierungen erfolgten auf photographischem Wege, da ich hierzu alles Nötige vorfand. Für langdauernde Registrierungen wird man zweckmässig einen mechanisch registrierenden Banndorfschen Apparat verwenden, bei dem man in ähnlicher Weise wie es bei dem hier skizzierten Elektrometer geschehen ist die Kapacität durch Isolierung der Dämpfung etc. herabsetzt.

III. Zweite Registrierperiode.

Registriereinrichtung für schnelle Schwankungen der Leitfähigkeit. Sowohl bei der in Figur 6, a, b dargestellten als auch bei allen anderen Kurven zeigten sich zeitweise kleine Zacken die bei der Trägheit des Systems auf schnelle und ziemlich beträchtliche Schwankungen der Leitfähigkeit schliessen liessen. In den Ostertagen 1906 nahm ich daher einige neue Registrierungen vor. Die Isolation im Freien wurde durch die in Fig. 2 abgebildete ersetzt,

1) Bronson (Phil. Mag. (6) 11. S. 143, 1906) hat für elektrostatische Strommessungen eine Jonisierungszelle mit Polonium benutzt; da dieses sehr viel mehr a Strahlen aussendet als das Uran, erzielte er statt Sättigungsstrom Ohmschen Strom; eine solche Zelle würde sich daher für vorliegende Zwecke besser eignen.



die sich bei dem schlechtesten Wetter gut, bewährt hatte. Der Zerstreuungsdraht wurde direkt mit dem Elektrometer verbunden, das Elektrometer wurde so empfindlich gemacht, daß es für 1 Volt 0,82 cm Ausschlag gab und die Ruhelage so gewählt, daß bei 88 Volt der Lichtpunkt auf die Registriertrommel fiel, mittelst eines an dem Sekundenzeiger einer Weckuhr befestigten dünnen Drahtes wurde der Zerstreuungsdraht alle Minuten 1 sec. lang auf 88 Volt aufgeladen, die Spannung wurde von einer Batterie Bornhäuser Accumulatoren genommen. Während einer Minute entlud sich nun infolge der Leitfähigkeit der Luft der Zerstreuungsdraht um einen gewissen Betrag und der Lichtpunkt des Elektrometers schrieb eine Gerade quer über den Registrierstreifen, die Registriergeschwindigkeit betrug $\frac{1}{2}$ mm in der Minute. Die Einhüllende dieser dicht nebeneinander liegenden Striche giebt dann die Leitfähigkeitskurve. Die Leitfähigkeit berechnet sich nach der eingangs erwähnten Formel:

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \frac{Z+C}{Z} \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{V_1}{V_2}$$

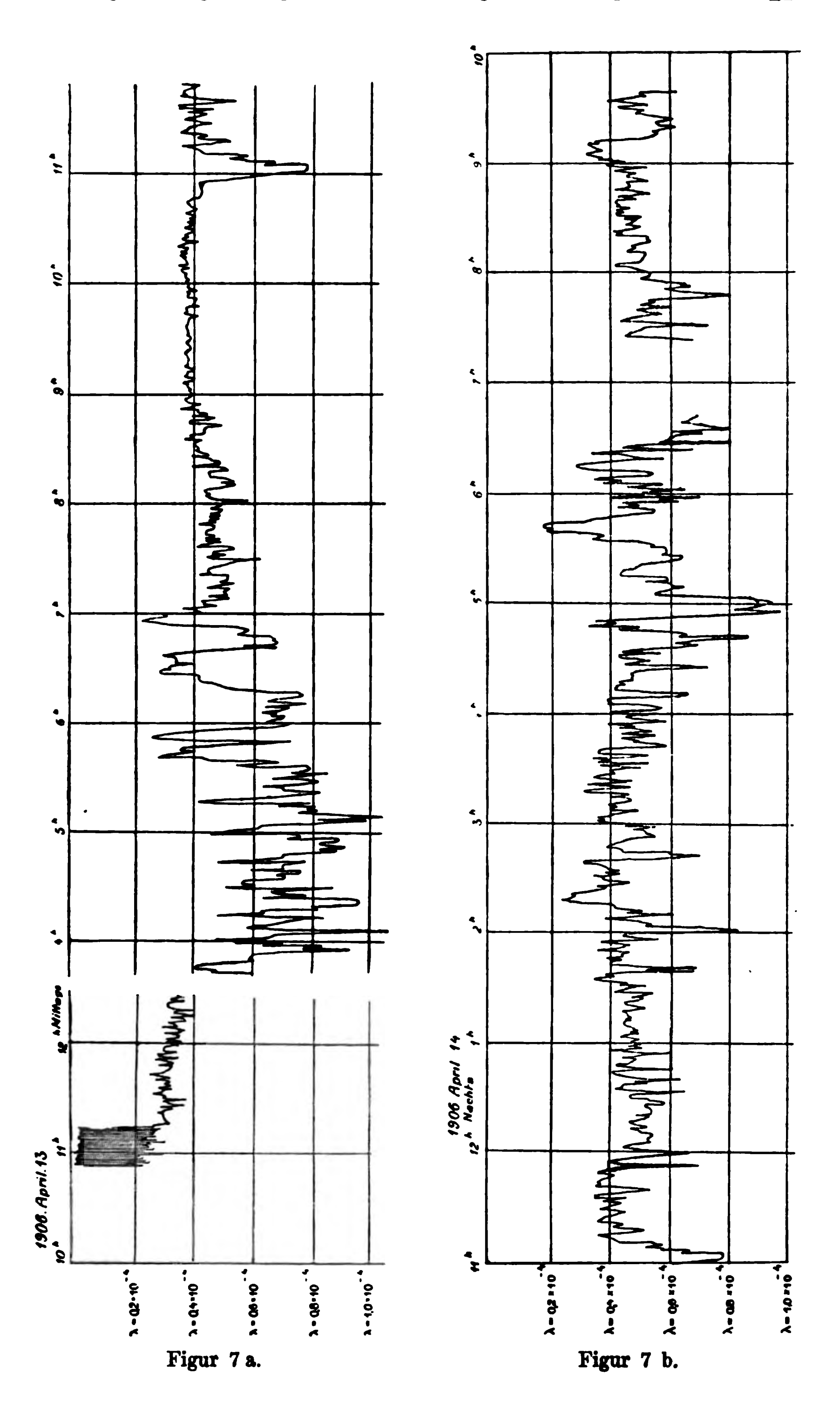
Dabei war hier

$$\begin{aligned} Z+C &= 130\,\text{cm} \\ Z &= 104\,\text{cm} \\ t_2 - t_1 &= 59\,\text{sec} \\ V_1 &= 88\,\text{Volt} \end{aligned}$$

V_2 wird aus der Kurve abgelesen.

Die Registrierungen. In Fig. 7 ist die Einhüllende der Registrierung vom 13./14. April 1906 wiedergegeben, gleichzeitig sind Meßlinien eingezeichnet, so daß sich die Leitfähigkeiten direkt ablesen lassen. In dem Stück von 12—2 Uhr Mittags muß das Papier durch Zufall vorher Licht bekommen haben, die Stelle war ganz schwarz. In der Fig. sieht man nun, daß tatsächlich zeitweise recht beträchtliche und schnelle Schwankungen der Leitfähigkeit vorkommen.

Berechnet man nun die Zeit innerhalb derer die Zahl der Jonen durch Molisierung um 10% abnimmt, so ergiebt sich daß in ein und demselben Luftquantum die Leitfähigkeit nicht wohl so schnell wechseln kann. Es ist $\frac{dn}{dt} = \alpha n^2$, wo n die spec. Jonendichte bedeutet α die Wiedervereinigungs-Constante, die rund 3400. ε beträgt (ε die spec. Jonenladung). Nun habe ich bei einer Leitfähigkeit von $0{,}6 \times 10^{-4}$ wie wir sie hier haben, früher mit dem Ebert-Gerdienschen Apparat 0,2 elektrostatischen Einheiten



Figur 7 a.

Figur 7 b.

im cbm gefunden, das sind etwa $\frac{0.2 \times 10^{-6}}{\varepsilon}$ Jonen im ccm. Zu einer Abnahme um 10% durch Molisierung sind demnach $1\frac{1}{2}$ Minuten nötig. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß die Luft auch an räumlich nicht weit entfernten Stellen verschiedene Leitfähigkeit haben kann und durch Luftbewegung in den Zerstreuungsapparat geschafft wird. Es müßten, um dieses sicherzustellen, Aufnahmen bei Windstille und bei Luftbewegung verglichen werden, dazu reicht aber das wenige vorhandene Material nicht aus.

Daß nicht etwa eine Luftbewegung an sich bei völlig gleichmäßig räumlich verteilter Leitfähigkeit, solche Schwankungen in dem Strome hervorrufen kann, geht ja aus der Eigenschaft des Ohmschen Stromes hervor.

Bekannt ist, daß bei gleichzeitiger Messung z. B. von Jonendichten mit zwei Apparaten ziemlich beträchtliche unregelmäßige Abweichungen der Angaben bald in der einen bald in der anderen Richtung gefunden werden, wahrscheinlich beruht auch diese Thatsache auf räumlichen Verschiedenheiten der Jonisation der Luft.

Die zweite Registriermethode würde sich gut für Leitfähigkeitsmessungen während einer Sonnenfinsternis eignen, da sie die Mittelwerte von bedeutend kürzeren Zeitabschnitten giebt als die gebräuchlichen Apparate.

Über die Erzeugung linearer ternärer Substitutionen aus einer geringsten Anzahl von Fundamentalsubstitutionen.

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg i./Pr.

Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1908 durch Herrn F. Klein.

Man hat schon verschiedentlich lineare ternäre Substitutionen (sc. mit einer von Null verschiedenen Determinante Δ) aus Fundamentalsubstitutionen zusammengesetzt; indessen ist meines Wissens die Frage nach einer Minimalanzahl solcher Fundamentalsubstitutionen noch nicht behandelt worden, geschweige denn eine explizite Darstellung gegeben.

Seien x_i, x_k, x_l die alten Variabeln, x'_i, x'_k, x'_l neue, so dienen als Fundamentalsubstitutionen einmal die sechs „Elementarschiebungen" vom Typus (x_i, x_k):

$$(1)\qquad (x_i, x_k):\quad x_i = x'_i + hx'_k,\quad x_k = x'_k,\quad x_l = x'_l,$$

andererseits die drei „Elementarstreckungen" vom Typus (x_i, x_i):

$$(2)\qquad (x_i, x_i):\quad x = mx'_i,\quad x_k = x'_k,\quad x_l = x'_l.$$

Die beliebig vorgelegte Substitution der x_i, x_k, x_l in neue Variable x'_i, x'_k, x'_l besitze die neun Koeffizienten a_{ik} mit der Determinante $\Delta \neq 0$, und werde kurz mit $A = (a_{ik})$ bezeichnet.

Daß eine Erzeugung von A durch weniger als vier verschiedene Fundamentalsubstitutionen (und deren Kombination) nicht möglich ist, ist leicht ersichtlich.

Dagegen ist die Erzeugung von A aus vier verschiedenen Fundamentalsubstitutionen, wie sich zeigen wird, ausführbar, und zwar im Wesentlichen nur auf eine einzige Art. Zunächst be-

darf man irgend einer Elementarstreckung, um A auf eine unimodulare Substitution zu reduzieren.

Die Aufgabe kommt daher darauf hinaus, eine unimodulare Substitution A $(\Delta = 1)$ durch eine geringste Anzahl von Elementarschiebungen zu erzeugen. Will man hier mit drei solchen auskommen, so ergeben Versuche, daß dieselben von zyklischem Charakter sein müssen, d. h. vom Typus (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), resp. von dem gleichberechtigten Typus (x_2, x_1), (x_1, x_3), (x_3, x_2).

Indem wir etwa den ersteren Typus verfolgen, setzen wir zur Abkürzung:

$$(3) \qquad U_1 = (x_2, x_3), \qquad U_2 = (x_3, x_1), \qquad U_3 = (x_1, x_2),$$

und fügen, so oft es nötig ist, den jeweiligen Schiebungsparameter in Klammern hinzu.

Die Aufgabe findet ihre Erledigung in vier Hauptschritten, indem sukzessive Substitutionen allgemeineren Charakters konstruiert werden.

Beim ersten Schritte verwende man nur U_2 und U_3, so gelangt man zu einer Substitution V, für die a_{12}, a_{31}, a_{32} beliebig, $a_{ii} = 1$, die übrigen drei a_{ik} verschwinden. Soll kein Ausnahmefall zurückbleiben, so muß U_3, wie U_2 zweimal ausgeübt werden, und es entsteht die Erzeugung:

$$\text{(I)} \qquad V(a_{ii} = 1,\ a_{13} = a_{21} = a_{23} = 0) = V(a_{12}, a_{31}, a_{32}) =$$
$$= U_3\left(a_{12} - \frac{a_{32}}{k}\right) U_2(k)\, U_3\left(\frac{a_{32}}{k}\right) U_2(a_{31} - k)$$
$$= U_3(a_{12} - l)\, U_2\left(\frac{a_{32}}{l}\right) U_3(l)\, U_2\left(a_{31} - \frac{a_{32}}{l}\right).$$

Hier ist unter k, resp. l ein überzähliger Parameter zu verstehen, der lediglich von Null verschieden anzunehmen ist und am einfachsten gleich der positiven oder negativen Einheit gesetzt wird.

Der Darstellung (I) gehen zwei andere parallel, indem an die Stelle von U_3, U_2 einmal U_2, U_1, das drittemal U_1, U_3 treten.

Um von der Substitution V (I) zu einer allgemeineren W zu gelangen, bei der außer a_{12}, a_{31}, a_{32} auch noch a_{13}, a_{23}, a_{33} beliebig sind, während $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{21} = 0$ ist, hat man V mit einer U_1, sodann mit einer U_3, endlich nochmals mit einer U_1 zusammenzusetzen.

Die Durchführung der Rechnung liefert die Erzeugung:

$$\text{(II)}\quad W(a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{21} = 0) = W(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}) =$$
$$= V(a_{12} - m,\ a_{31},\ a_{32} - m\, a_{31})\ U_1\!\left(\frac{\alpha_{31}}{m}\right) U_3(m)\ U_1\!\left(a_{23} - \frac{\alpha_{31}}{m}\right).$$

Hier bedeutet α_{31} die Unterdeterminante von a_{31} in der Determinante der a_{ik}, also den Ausdruck $a_{12}\, a_{23} - a_{13}$, und m wiederum einen überzähligen Parameter, der nur von Null verschieden anzunehmen ist, und am einfachsten gleich der positiven oder negativen Einheit gesetzt wird. Endlich ist die Erzeugung von V der Formel (I) zu entnehmen, wobei natürlich an Stelle der damaligen Argumente a_{12}, a_{31}, a_{32} jetzt die neuen: $a_{12} - m, a_{31}\ a_{32} - m a_{31}$ einzutragen sind.

Setzt man nunmehr die Substitution W (II) der Reihe nach mit einer geeigneten U_2, U_3, U_1 zusammen, so wird man zu der Erzeugung einer im Übrigen allgemeinen unimodularen Substitution $B = (b_{ik})$ geführt, wo aber die b_{ik} noch an die drei Ungleichungen gebunden sind:

$$\text{(4)}\qquad b_{21} \neq 0,\quad \beta_{31} \neq 0,\quad b_{22} - \beta_{33} \neq 0,$$

unter β_{31}, β_{33} die Unterdeterminante von b_{31}, resp. b_{33} in der Determinante der b_{ik} verstanden.

Ist analog β_{11} die Unterdeterminante von b_{11}, β_{12}, β_{32} die von b_{12}, b_{32}, so ist, wie sich auf Grund einer längeren Rechnung erweist, eine Substitution B mit den Bedingungen (4) aus U_1, U_2, U_3 erzeugbar, wie folgt:

$$\text{(III)}\quad B(b_{ik}) = W\Big\{\, a_{11} = 1,\ \ a_{12} = \frac{b_{11} - \beta_{33}}{b_{21}},\ \ a_{13} = \frac{(b_{11} - 1)\,\beta_{31}}{b_{21} - \beta_{33}},$$
$$a_{21} = 0,\ \ a_{22} = 1,\ \ a_{23} = \frac{b_{21}\ \beta_{31}}{b_{22} - \beta_{33}},\ \ a_{31} = \frac{1 - \beta_{11}}{\beta_{31}},\ \ a_{32} = \frac{b_{21} + \beta_{12}}{b_{21}},$$
$$a_{33} = \frac{b_{21}\beta_{31} + \beta_{11} - 1}{b_{22} - \beta_{33}}\Big\}\ U_2\!\left(\frac{b_{22} - \beta_{33}}{\beta_{31}}\right) U_3\!\left(\frac{b_{22} - 1}{b_{21}}\right) U_1\!\left(\frac{b_{23} + \beta_{32}}{b_{22} - \beta_{33}}\right).$$

Hier trage man die Erzeugung von W aus (II) und (I) ein, wobei von den beiden Darstellungen (I) die mit dem Parameter l die bequemere ist. Verfügt man insbesondere über die beiden Parameter l und m so, daß entweder $l = 1$, $m = -1$, oder aber $l = -1$, $m = 1$ wird, also in beiden Fällen $l + m = 0$, so nimmt die explizite Erzeugung einer unimodularen Substitution $B(b_{ik})$ mit den Bedingungen (4) die doppelte Gestalt an:

$$\text{(III')}\qquad B(b_{ik}) = U_3\left(\frac{a_{11}-\beta_{33}}{b_{31}}\right) U_2\left(\frac{1-\beta_{11}}{\beta_{31}} \pm \frac{b_{31}+\beta_{13}}{b_{21}}\right) U_3(\pm 1)$$

$$U_2\left(\mp \frac{b_{31}+\beta_{31}}{b_{21}}\right) U_1\left(\pm \frac{\beta_{31}(\beta_{33}-1)}{b_{22}-\beta_{33}}\right) U_3(\mp 1)\; U_1\left[\frac{\beta_{31}\{\beta_{21} \pm (1-\beta_{33})\}}{b_{22}-\beta_{33}}\right]$$

$$U_2\left(\frac{b_{22}-\beta_{33}}{\beta_{31}}\right) U_3\left(\frac{b_{22}-1}{b_{21}}\right) U_1\left(\frac{b_{23}+\beta_{32}}{b_{22}-\beta_{33}}\right),$$

wo entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten.

Endlich sei eine ganz allgemeine unimodulare Substitution $A = (a_{ik})$ vorgelegt, wo die a_{ik} der einzigen Bedingung unterliegen, daß ihre Determinante Δ den Wert 1 besitzt, im Übrigen aber völlig willkürliche (reelle oder komplexe) Größen repräsentieren.

Dann wird man A der Reihe nach mit einer $U_1(h)$, $U_3(k)$, $U_2(l)$ zusammensetzen, um dadurch eine Substitution B zu konstruieren, für die bei geeigneter Wahl der h, k, l die Bedingungen (4) von selbst erfüllt sind.

Die linken Seiten jener drei Bedingungen (4) nehmen dann die Werte an:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} b_{31} &= a_{31} + hka_{32} + ka_{33}, \\ \beta_{31} &= \alpha_{31} - l\;\alpha_{32} + hl\alpha_{33}, \\ b_{22} - \beta_{33} &= (a_{22} - \alpha_{33}) + k\alpha_{31} + la_{21} + hkla_{22} + kla_{23}. \end{aligned}\right.$$

Hier lassen sich die h, k, l — und zwar noch in dreifach unendlicher Auswahl — stets so annehmen, daß die drei Ausdrücke (5) von Null verschieden ausfallen, da wegen $\Delta = 1$ weder die a_{31}, a_{32}, a_{33}, noch die Unterdeterminanten α_{31}, α_{32}, α_{33} gleichzeitig verschwinden können.

Um jetzt die Darstellung (III') verwenden zu können, bedarf es noch der Werte der b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{22}, b_{23}, β_{33}, β_{11}, β_{13}, β_{32}, ausgedrückt in den a_{ik} und h, k, l.

Man erhält:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} + hk\,a_{12} + k\,a_{13}, \\ b_{21} &= a_{21} + hk\,a_{22} + k\,a_{23}, \\ b_{31} &= a_{31} + hk\,a_{32} + k\,a_{33}, \\ b_{22} &= l\,a_{21} + (1 + hkl)\,a_{22} + kl\,a_{23}, \\ b_{23} &= h\,a_{22} + a_{23}; \end{aligned}\right. \\ &\left\{\begin{aligned} \beta_{11} &= \alpha_{11} - l\,\alpha_{12} + hl\,\alpha_{13}, \\ \beta_{13} &= -\;k\alpha_{11} + \alpha_{13}, \\ \beta_{32} &= \alpha_{32} - h\alpha_{33}, \\ \beta_{33} &= -\,k\,\alpha_{31} + \alpha_{33} \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

sechs Elementarschiebungen (x_i, x_k) (1) invariant verhält. Aus Satz I folgt dann sofort:

Die gegebene Substitution A stellt sich dann in der Form dar:

$$\text{(IV)} \qquad A = B\, U_3(-l)\, U_2(-k)\, U_1(-h).$$

Damit ist der Hauptsatz abgeleitet:

Satz I. „Jede ternäre lineare unimodulare Substitution $A = (a_{ik})$ ist vermöge (IV) aus den drei zyklischen Elementarschiebungen $U_1 = (x_2, x_3)$, $U_2 = (x_3, x_1)$, $U_3 = (x_1, x_2)$ als Fundamentalsubstitutionen erzeugbar.

Hierbei wird die Erzeugung der Substitution B vermöge (III′) geliefert, wo für die Argumente b, β die in (5) und (6) angegebenen Werte zu substituieren sind. Die drei überzähligen Parameter h, k, l sind, was stets möglich ist, so zu wählen, daß die drei Ungleichungen (4) von selbst erfüllt werden“.

Von speziellem Interesse sind die „Spiegelungen“ A, für die alle $a_{ik} (i \neq k)$ verschwinden, und die a_{ii}, absolut genommen, gleich Eins sind. Ist etwa $a_{11} = -1$, $a_{22} = +1$, $a_{33} = -1$, und wird die bezügliche Spiegelung mit S_2 bezeichnet, so entnimmt man der Formel (IV) die Erzeugung:

$$\text{(7)} \qquad S_2 = U_2(2)\, U_3(-1)\, U_1(2)\, U_3(+1)\, U_2(+1)\, U_3(-1)\, U_1(2)\, U_3(+1) \\ U_2(-1)\, U_1(-1).$$

Durrch zyklische Vertauschung der U_1, U_2, U_3 gehen aus (7) die Erzeugungen der mit S_2 gleichberechtigten Spiegelungen S_3, S_1 hervor.

Von den Anwendungen des Satzes I sei hier nur die auf ternäre Invarianten angeführt.

Seien $f(x_1, x_2, x_3)$, $g(x_1, x_2, x_3)$ ... ternäre Urformen, so verstehe man unter einer „unimodularen“ Invariante I von f, g ... eine eindeutige, analytische Funktion der Koeffizienten von $f, g, \ldots$, die gegenüber beliebigen unimodularen Substitutionen der Variabeln (absolut) ungeändert bleibt. Für solche I hat Forsyth[1]) sechs „charakteristische“ lineare partielle Differentialgleichungen aufgestellt:

$$\text{(V)} \qquad D_{x_1, x_2} = 0, \quad D_{x_2, x_1} = 0, \quad D_{x_2, x_3} = 0, \quad D_{x_3, x_2} = 0, \\ D_{x_3, x_1} = 0, \quad D_{x_1, x_3} = 0.$$

Diese sechs Gleichungen sagen aus, daß sich I gegenüber den

1) American Journal of Mathematics XII (1889), p. 1—60, 115—160.

Satz II. „Von den sechs linearen partiellen Differentialgleichungen (V) sind bereits drei zyklische $D_{x_i, x_k} = 0$, $D_{x_k, x_l} = 0$, $D_{x_l, x_i} = 0$ notwendig und hinreichend für die Charakterisierung einer unimodularen Invariante J ternärer Urformen $f, g, \ldots$".

Außer den sechs Differentialgleichungen (V) finden sich bei Forsyth noch drei weitere:

(VI) $$D_{x_1, x_1} = 0, \quad D_{x_2, x_2} = 0, \quad D_{x_3, x_3} = 0,$$

die für sich aussagen, daß sich ein Ausdruck I gegenüber den drei Elementarstreckungen (x_i, x_i) (2) (relativ) invariant verhält.

Verbindet man den Satz II mit der Eingangs gemachten Bemerkung über die Reduktion einer beliebigen Substitution auf eine unimodulare, so ergibt sich:

Satz III. „Von den neun Differentialgleichungen (V), (VI) sind bereits vier, nemlich drei zyklische (V), und irgend eine (VI) notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion I der Koeffizienten ternärer Urformen $f, g, \ldots$ gegenüber beliebigen Substitutionen der Variabeln eine Invariante ist".

Läßt man behufs Erzeugung einer unimodularen Substitution A vier verschiedene Fundamentalsubstitutionen zu, so liegen zunächst drei wesentlich verschiedene Möglichkeiten vor.

Entweder werden die drei zyklischen Schiebungen U (3) noch mit irgend einer der drei „reziproken":

$$U_1' = (x_3, x_2), \quad U_2' = (x_1, x_3), \quad U_3' = (x_2, x_1)$$

kombiniert, dann ist die Erzeugung von A a fortiori statthaft.

Oder aber man kombiniert irgend zwei der U, U_i und U_k mit den beiden zugehörigen U_i' und U_k', so ist leicht zu zeigen, daß auch vermöge dieser A konstruierbar ist.

Dagegen führt die dritte und letzte Möglichkeit, die Kombination eines Paares U_i, U_i' mit einem Paare U_k, U_l' stets nur zu gewissen speziellen A.

Die diesen drei Tatsachen korrespondierenden Invariantensätze sind ohne Weiteres angebbar.

Durch Verwendung allgemeinerer Hilfsmittel lassen sich die Sätze I II III auf n Variable ausdehnen. Eine unimodulare Substitution ist dann aus irgend n zyklisch verbundenen Elementarschiebungen (x_i, x_k) erzeugbar, von den $n(n-1)$, (V) entsprechenden Differentialgleichungen sind wiederum n zyklische bereits charakteristisch für eine unimodulare Invariante, u. s. f.

Bekanntmachung.

Auf Grund des von dem verstorbenen Herrn Dr. Paul Wolfskehl in Darmstadt uns zugewendeten Vermächtnisses wird hiermit ein Preis von 100000 Mk., in Worten: „Einhunderttausend Mark", für denjenigen ausgesetzt, dem es zuerst gelingt, den Beweis des großen Fermat'schen Satzes zu führen. Herr Dr. Wolfskehl bemerkt in seinem Testamente, daß Fermat (siehe z. B. Oeuvres de Fermat Paris 1891 t. I pg. 291 observ. II) mutatis mutandis die Behauptung aufgestellt hat, daß die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist für alle diejenigen Exponenten λ, welche ungrade Primzahlen sind. Dieser Fermat'sche Satz ist entweder im Sinne Fermats allgemein oder in Ergänzung der Untersuchungen von Kummer (Crelles Journal 40, S. 130 ff., Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1857) für alle die Exponenten λ zu beweisen, in denen er überhaupt Geltung hat. Ueber weitere Litteratur vergleiche man: Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (1894—95) § 172—173 und Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil 2 Arithmetik und Algebra (1900—1904) I C 4 b, S. 713.

Die Aussetzung des Preises erfolgt unter folgenden näheren Bedingungen:

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen entscheidet frei darüber, wem der Preis zuzuerkennen ist. Sie lehnt die Annahme jeder Manuskriptsendung ab, die auf die Bewerbung um den Preis für den Fermat'schen Satz Bezug hat; sie berücksichtigt für die Preiszuteilung lediglich solche mathematische Abhandlungen, die in periodischen Zeitschriften, als Monographien oder in Buchform im Buchhandel käuflich erschienen sind. Die Gesellschaft stellt dem Verfasser solcher Abhandlungen anheim, etwa 5 gedruckte Exemplare davon an sie einzusenden.

Außer Betracht bleiben für die Verleihung des Preises solche Arbeiten, die in einer Sprache gedruckt sind, welche den zur Beurteilung der Arbeit berufenen Fachgelehrten unverständlich ist. An die Stelle solcher Arbeiten können vom Verfasser als richtig anerkannte Uebersetzungen treten.

Die Gesellschaft lehnt alle Verantwortlichkeit für eine Nichtberücksichtigung von Arbeiten ab, die nicht zu ihrer Kenntnis gelangt sind, desgleichen für alle Irrtümer, die daraus entspringen könnten, daß der wirkliche Verfasser der Arbeit oder eines Teiles derselben als solcher der Gesellschaft unbekannt geblieben ist.

Sie behält sich für den Fall, daß an der Lösung der Aufgabe mehrere Personen beteiligt sind oder die Lösung durch die Arbeiten mehrerer Gelehrter herbeigeführt worden ist, freieste Entscheidung, insbesondere auch die Teilung des Preises nach ihrem Ermessen vor.

Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft erfolgt frühestens zwei Jahre nach der Veröffentlichung der zu krönenden Abhandlung. Es soll innerhalb dieses Zeitraumes deutschen und ausländischen Mathematikern Gelegenheit geboten werden, über die Richtigkeit der durch die Veröffentlichung bekannt gewordenen Lösung sich zu äußern.

Ist der Preis durch die Gesellschaft zuerkannt, so wird davon den Berechtigten durch den vorsitzenden Sekretär im Namen der Gesellschaft Mitteilung gemacht und solches öffentlich an allen denjenigen Orten bekannt gegeben werden, an denen der Preis im letzten Jahre ausgeschrieben war. Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft ist unanfechtbar.

Die Auszahlung des Preises erfolgt an den Berechtigten innerhalb dreier Monate nach seiner Zuerkennung durch die Königliche Universitätskasse in Göttingen oder auf Gefahr und Kosten des Empfängers an einem anderen von ihm zu bezeichnenden Orte, und zwar wird das vermachte Kapital je nach der Wahl der Gesellschaft bar oder in den hierfür hinterlegten Papieren gegen rechtsgültige Quittung zur Auszahlung gebracht. Die Auszahlung des Preises kann durch Aushändigung der hinterlegten Wertpapiere auch dann erfolgen, wenn deren Kurswert die Summe von 100000 Mark nicht mehr erreichen sollte.

Falls der Preis bis zum 13. September 2007 nicht zuerkannt ist, können Ansprüche auf ihn nicht mehr erhoben werden.

Mit dem heutigen Tage tritt die Wolfskehlsche Preisstiftung unter den vorstehend angegebenen Bedingungen in Kraft.

Göttingen, den 27. Juni 1908.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ordentliche Sitzung am 11. Juli 1908.

W. Meyer Zwei Gedichte zur Geschichte des Cistercienser Ordens. (Erscheint in den Nachrichten phil.-hist. Kl.)

F. Klein legt vor: P. Koebe, Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. III. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: P. Staeckel, Ueber die reduzierten Differentialgleichungen des schweren unsymmetrischen Kreisels. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

O. Wallach, Untersuchungen aus dem Göttinger Universitäts-Laboratorium. XX. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Für die Redaktion verantwortlich: F. Leo, d. Z. vorsitzender Sekretär d. Kgl. Ges. d. Wiss.
Ausgegeben am 20. Juli 1908.
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1908. Heft 3.

Inhalt:

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1908.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ordentliche Sitzung am 11. Juli 1908.

W. Meyer, Zwei Gedichte zur Geschichte des Cistercienser Ordens. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1908, S. 377.)

F. Klein legt vor: P. Koebe, Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. III. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Derselbe legt vor: P. Staeckel, Ueber die reduzierten Differentialgleichungen des schweren unsymmetrischen Kreisels. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1908, S. 272.)

O. Wallach, Untersuchungen aus dem Göttinger Universitäts-Laboratorium. XX. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1908, S. 253.)

F. C. Andreas legt eine der Kgl. Ges. zugegangene Streitschrift des Herrn Ter-Mikaëlian gegen Herrn F. N. Finck vor und kündigt eine den Gegenstand betreffende Notiz für die Nachrichten an. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1908, S. 375.)

Ordentliche Sitzung am 25. Juli 1908.

F. Klein legt vor: Mathematische Encyklopädie IV, 2, 1, 4.

W. Voigt, Formeln für die Reflexion des Lichtes an einer dünnen Metallschicht. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1908, S. 284.)

K. Schwarzschild legt vor: M. Brendel, Theorie der kleinen Planeten. II. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

H. Wagner legt vor: A. Wolkenhauer, Sebastian Münsters Collegienheft vom Jahre 1515. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

L. Morsbach, Shakespeare und der Euphuismus. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

W. Meyer, Quondam fuit factus festus, ein Gedicht in Spottlatein. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1908, S. 406.)

Derselbe legt vor: J. Jak. Werner, Poetische Versuche und Sammlungen eines Baseler Klerikers aus dem Ende des 13. Jahrhunderts. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

P. Kehr legt Band III der Italia pontificia vor.

Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Kreisbogenvierecke.

Von

W. Ihlenburg.

(Aus einem Schreiben an Herrn F. Klein).

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 16. Mai 1908.

Im Nachfolgenden erlaube ich mir, Ihnen eine kurze Mitteilung über meine Untersuchungen betreffend Kreisbogenvierecke zu machen.

Unter einem Kreisbogenviereck verstehe ich allgemein eine in der Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende, von vier Kreisbogen begrenzte Fläche. Wird die Begrenzung so durchlaufen, daß das Innere der Fläche beständig zur Linken liegt, so folgen dabei die begrenzenden Kreise in einer bestimmten Reihenfolge aufeinander. Je zwei aufeinanderfolgende Kreise werden sich unter reellen Winkeln schneiden, so daß die Fläche vier Ecken erhält. Die Ecken bezeichnen wir dem Umlaufssinn entsprechend mit a, b, c, d, die Winkel mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Die Maßeinheit für die Winkel legen wir so fest, daß eine halbe Umdrehung gleich 1, eine volle Umdrehung gleich 2 wird und so fort. Im Innern soll die Fläche von Windungspunkten frei sein.

Nach bekannten Grundsätzen betrachte ich alle solche Kreisbogenvierecke als identisch, die sich durch eine lineare Transformation $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ in einander überführen lassen, wenn η eine in der Ebene des Kreisbogenvierecks gedeutete komplexe Variable ist.

Wirft man das Viereck durch stereographische Projektion auf eine Kugel, so liegen die Begrenzungskreise in vier die Kugen schneidenden Ebenen, deren Inbegriff nach Ihrer Terminologie der

„Kern“ des Kreisbogenvierecks ist. Jedes Kreisbogenviereck besitzt einen Kern, in den es selbst als Membran eingehängt erscheint.

Meine Untersuchungen schließen sich übrigens in erster Linie an die Arbeit von Herrn A. Schönfließ in Bd. 44 der Math. Ann. an (Ueber Kreisbogendreiecke und Kreisbogenvierecke), wo mit der gestaltlichen Untersuchung der Kreisbogenvierecke der Anfang gemacht ist.

Ich habe mir insbesondere folgende Fragen gestellt und erledigt:

1) Wie können bei Vorgabe der Winkel sämtliche Kreisbogenvierecke mit diesen Winkeln konstruiert und in eine kontinuierliche Folge gebracht werden?

2) Wie oft ist bei Vorgabe der Winkel die volle Peripherie eines der Begrenzungskreise in der Begrenzung der Membran enthalten? Diese „Umlaufszahlen“ der Seiten, welche mit u_{ab}, u_{bc}, u_{cd}, u_{da} bezeichnet werden mögen, sind mit den Winkeln durch Relationen verknüpft, welche der Ergänzungsrelation der Kreisbogendreiecke entsprechen, die Sie selbst in Bd. 37 der Math. Ann. in der Arbeit über die Anzahl der Nullstellen der hypergeometrischen Reihe aufgestellt haben. Diese für das Viereck geltenden Relationen sollen auch hier als „Ergänzungsrelationen“ bezeichnet werden.

3) Drittens kann noch die Frage gestellt werden: Wenn zwei Kreisbogenvierecke dieselben Winkel und dieselben Umlaufszahlen der Seiten besitzen (welche dann den Ergänzungsrelationen genügen müssen) und wenn sich durch eine Bewegung des Raumes, welche der linearen Transformation der η-Ebene entspricht, ihre Kerne zur Deckung bringen lassen, sind dann die Membrane selbst identisch?

Die zur Erledigung dieser Fragen von mir angewandte Methode will ich hier an einem einfachen Beispiel erläutern.

Die vier Winkel mögen den Ungleichheitsbedingungen genügen:

$$1+\alpha<\delta<1+\gamma<2;\ \beta<1.$$

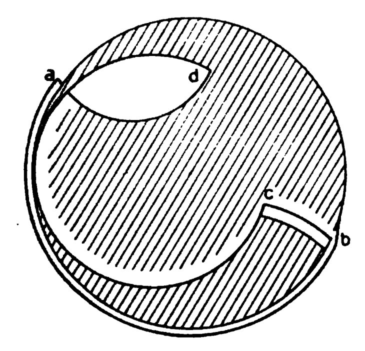
Ein Kreisbogenviereck besitzt nun, wenn seine Winkel festgehalten werden, noch zwei Parameter, die in folgender Weise gedeutet werden können.

Figur 1.

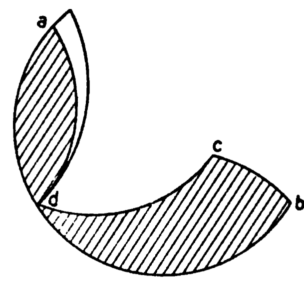
Wir können einmal die vier Ecken der Membran festhalten und eine Seite (z. B. ab) um ihre Endpunkte drehen (Fig. 1). Sollen dann die Viereckswinkel

ungeändert bleiben, so müssen wir die drei andern Seiten um denselben Winkel wie ab in geeignetem Sinn drehen unter Festhaltung der Eckpunkte. Da diese festliegen, bleiben die Umlaufszahlen der Seiten ungeändert. Durch diese Drehung mag der eine Vierecksparameter gedeutet werden.

Drehen wir nun beständig in demselben Sinne weiter, so müssen schließlich die Teile der Begrenzung zusammenstoßen. Es können sich hierbei entweder zwei gegenüberliegende Seiten berühren, oder es kann ein Eckpunkt auf eine gegenüberliegende Seite fallen (Fig. 2—4). Wenn die Drehung so weit fortgeschritten



Figur 2.

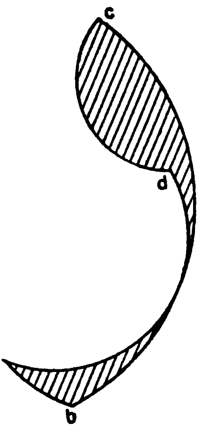


Figur 3.

ist, gebrauche ich den Ausdruck: „Das Viereck befindet sich in der Grenzlage“.

In jeder der beiden Arten von Grenzlagen ist noch ein Parameter enthalten. In den Figuren 2 und 3 ist angedeutet, wie sich die Begrenzung bei Variation desselben verändert. Auf diese Weise mag der zweite noch übrige Parameter gedeutet werden.

In der Grenzlage der ersten Art zerlegt sich nun die Membran ev. unter Abschnürung einer Anzahl von Kreisringen in zwei Dreiecke, in der Grenzlage der zweiten Art in ein Dreieck und ein Zweieck ev. unter Abtrennung polar eingehängter Kreisscheiben. Da aber die Konstruktion der Kreisbogendreiecke bekannt ist, so können die Grenzlagen ohne weiteres konstruiert werden. Indem man aus der Grenzlage heraus in umgekehrter Richtung dreht, kann man die Vierecke selbst erhalten, zu denen die konstruierten Grenzlagen gehören.



Figur 4.

Um nun sämtliche Vierecke zu konstruieren, die es zu den gegebenen Winkeln gibt, hat man

nur sämtliche für diese Winkel vorhandenen Grenzlagen zu konstruieren. Will man alle verlangten Vierecke genau einmal erhalten, so braucht man jedoch nur diejenigen Grenzlagen zu benutzen, aus denen man durch eine Drehung heraus gelangt, bei der sich die Schenkel des Winkels α in der Richtung des Uhrzeigers bewegen.

Für das betrachtete Beispiel gibt es zwei Grenzlagen der ersten Art (Fig. 2 und 4). Aber es gibt nur eine Grenzlage der zweiten Art, diejenige, bei der d auf ab fällt (Fig. 3). Es ist nämlich $1 + \alpha < \delta$ die zum Bestehen dieser Grenzlage notwendige Bedingung.

Indem man dann weiter den Parameter der Grenzlagen verändert, erhält man sämtliche verlangten Vierecke durch Herausdrehen aus den Grenzlagen. Bei den Vierecken, die aus den Grenzlagen erster Art hervorgehen, sind nachträglich noch 1, 2, 3 ... Kreisringe einzuhängen.

Für die in der Grenzlage vorhandenen Dreiecke kennt man nun die Ergänzungsrelation. Sobald das Viereck sich in der Grenzlage befindet, lassen sich deshalb leicht die Beziehungen zwischen den Umlaufszahlen der Seiten und den Winkeln aufstellen. Da nun beim Uebergang aus der Grenzlage zum Viereck aber sowohl die Winkel, wie auch die Umlaufszahlen erhalten bleiben, gelten die erhaltenen Relationen ohne weiteres für das Viereck selbst.

Man kommt solcherweise für die allgemeinen Vierecke zu folgendem Resultat:

Soll die zweidimensionale Schar der Vierecke mit denselben gegebenen Winkeln in eine kontinuierliche Folge gebracht werden, so ist dabei in folgender Weise zu verfahren:

Die Bezeichnung der Winkel werde so gewählt, daß

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta \geqq 0 \quad \text{und gleichzeitig:}$$
$$\delta + \alpha - \beta - \gamma \geqq 0 \quad \text{ist.}$$

Dann hat man zunächst Vierecke mit den Relationen:

$$\text{I.} \qquad u_{ab} = u_{cd} + E\left(\frac{\gamma + \delta - \alpha - \beta}{2}\right) + \varepsilon; \; u_{bc} = u_{da} = 0.$$

Hierin hat u_{cd} die positiven ganzen Zahlen von $+\infty$ bis 0 (einschließlich) zu durchlaufen. Unter E verstehen wir die größte ganze in dem beigesetzten Argument enthaltene positive Zahl. Für jeden Wert ist zuerst $\varepsilon = 1$, dann $\varepsilon = 0$ (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Ferner hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{II.}\qquad u_{ab}+u_{bc}=E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)+\varepsilon;\quad u_{cd}=u_{da}=0$$

worin für u_{bc} die Werte 0 bis $E\left(\frac{\delta-\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)$ zu setzen sind und für jeden Wert von u_{bc} zuerst $\varepsilon=1$, dann $\varepsilon=0$ vorzuschreiben ist.

Sollte die aus ganzen Zahlen bestehende Wertereihe für u_{ab}, die aus II erhalten wird, sich nicht an die aus I erhaltene Wertereihe anschließen, so gibt es für die dazwischen fehlenden Werte von u_{ab} auch noch Vierecke, für welche dann außerdem immer $u_{bc}=u_{cd}=u_{da}=0$ ist.

Endlich hat man Vierecke mit den Relationen:

$$\text{III.}\qquad u_{bc}=u_{da}+E\left(\frac{\delta+\alpha-\beta-\gamma}{2}\right)+\varepsilon;\quad u_{ab}=u_{cd}=0.$$

Hier hat u_{da} mit 0 beginnend die Werte der positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen und für jeden Wert ist zuerst $\varepsilon=0$, dann $\varepsilon=1$ (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Die aus II und III erhaltene Wertereihe für u_{bc} ist, wenn notwendig, in entsprechender Weise zu vervollständigen wie die Wertereihe für u_{ab}.

Hat man unter Benutzung dieser Regel sämtliche zusammengehörigen Werte der Zahlen u_{ab}, u_{bc}, u_{cd}, u_{da} ermittelt, so existieren für jedes dieser Wertequadrupel auch Vierecke, welche die gegebenen Winkel und die gefundenen Umlaufszahlen besitzen. Zugleich sind diese Vierecke sämtliche, die zu den gegebenen Winkeln existieren. Sie bilden in der bei den Relationen angegebenen Reihenfolge ein zweidimensionales Kontinuum.

Herr E. Hilb hat mir mitgeteilt, daß sich dies Ergebnis durch geeignete Schreibweise der Relationen noch vereinfachen läßt. Es läßt sich dann folgende Regel aufstellen:

Man wähle die Bezeichnung wieder so, daß

$$\gamma+\delta-\alpha-\beta\geqq 0\quad\text{und gleichzeitig}$$
$$\delta+\alpha-\beta-\gamma\geqq 0\quad\text{ist.}$$

Dann hat man zunächst Vierecke mit den drei Relationen

$$u_{bc} = E\left(\frac{\delta - \alpha - \beta - \gamma}{2} - u_{ab} + \varepsilon\right)$$

$$u_{cd} = E\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma - \delta}{2} + u_{ab} + 1 - \varepsilon\right)$$

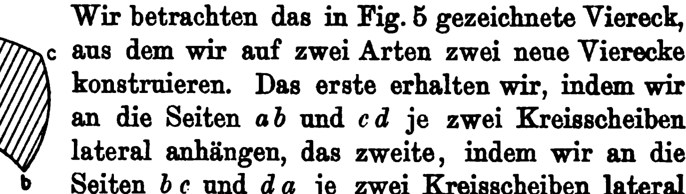
$$u_{da} = E\left(\frac{\gamma - \delta - \alpha - \beta}{2} - u_{ab} + \varepsilon\right).$$

Hierin hat u_{ab} die positiven Zahlen von $+\infty$ bis 0 (einschließlich) zu durchlaufen und für jeden Wert von u_{ab} ist für ε zunächst der Wert 1, dann der Wert 0 (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Vertauscht man in den Relationen a, b, c, d bezw. mit b, c, d, a und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezw. mit $\beta, \gamma, \delta, \alpha$, so erhält man drei Relationen, in denen die in den ersten drei Relationen für u_{bc} erhaltene Wertereihe bis $+\infty$ fortzusetzen ist. Dabei ist für jeden Wert von u_{bc} für ε zunächst der Wert 0, dann der Wert 1 (im allgemeinen) vorzuschreiben.

Aus diesen beiden Tripeln von Relationen erhält man so zwei Vierecksreihen, welche zusammen wieder sämtliche zu den gegebenen Winkeln existierende Vierecke enthalten.

Schließlich ist noch die **Eindeutigkeitsfrage** zu erledigen.



Figur 5.

Wir betrachten das in Fig. 5 gezeichnete Viereck, aus dem wir auf zwei Arten zwei neue Vierecke konstruieren. Das erste erhalten wir, indem wir an die Seiten ab und cd je zwei Kreisscheiben lateral anhängen, das zweite, indem wir an die Seiten bc und da je zwei Kreisscheiben lateral anhängen. Alle vier Winkel erhalten dann in beiden Vierecken einen einfachen Windungspunkt. Beide Vierecke stimmen nun in den Winkeln und den Begrenzungslinien, also auch im Kern überein, aber sind gestaltlich doch vollkommen von einander verschieden. Die Eindeutigkeitsfrage ist also in negativem Sinne zu beantworten.

Quedlinburg a. H., den 12. Mai 1908.

Neue Entwicklungen über lineare Differentialgleichungen.

Von

E. Hilb.

(Aus einem Schreiben an Herrn F. Klein).

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 16. Mai 1908.

Gestatten Sie, daß ich Ihnen beifolgend eine kurze Zusammenstellung meiner Resultate über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mitteile, die sich, wie Sie ja wissen, auf das Engste an Ihre Arbeit in den Mathematischen Annalen Band 64 anschließen.

Es seien, um mich ebenfalls auf den von Ihnen dort untersuchten einfachen Fall zu beschränken, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Größen, die den Ungleichungen unterworfen sind:

$$(1) \quad a > b > c;\ 0 < \alpha < 1;\ 0 < \beta < 1;\ 0 < \gamma < 1;\ 0 < \delta < 1.$$

Wir betrachten dann die Differentialgleichung:

$$(2) \quad y'' + y'\left(\frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c}\right) + \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)}\, y = 0,$$

welche die 4 singulären Punkte $a, b, c, d = \infty$ mit den Exponentenpaaren $\alpha, 0$; $\beta, 0$; $\gamma, 0$; δ', δ'' besitzt; es ist dabei:

$$(3) \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta'+\delta'' = 2;\ \delta'\delta'' = A,\ \delta'-\delta'' = \delta.$$

Die beiden zu einem singulären Punkte (z. B. zu a) gehörigen Fundamentallösungen seien Y_α^a und Y_0^a; wir setzen, nachdem die Lösungen geeignet normiert sind:

$$(4) \quad \begin{aligned} Y_\alpha^a &= Y_\beta^b - l_1 Y_0^b; & Y_\gamma^c &= Y_\beta^b - \nu_1 Y_0^b; \\ Y_0^a &= Y_\beta^b - l_2 Y_0^b; & Y_0^c &= Y_\beta^b - \nu_2 Y_0^b. \end{aligned}$$

Dabei sind l_1 und l_2 reelle Größen, dagegen sind ν_1 und ν_2 Produkte reeller Größen mit $e^{\pi i\beta}$, es ist also

$$\nu_1 = n_1 e^{\pi i\beta}; \; \nu_2 = n_2 e^{\pi i\beta}. \tag{5}$$

Der Quotient $\eta = \frac{Y_\beta^b}{Y_0^b}$ bildet dann die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene auf ein auf der η-Kugel gelegenes Kreisbogenviereck $a'\,b'\,c'\,d'$ ab, das wir näher betrachten. Die 4 Raumgeraden, in denen aufeinanderfolgend die 4 die Kreisbogen enthaltenden Ebenen sich schneiden, die „Achsen" des Kerns, mögen die Kugel in den Punkten a'', b'', c'', d'' das 2. Mal schneiden; dann hat η in den Punkten a', a''; b', b''; c', c'' die Werte: l_1, l_2; $0, \infty$; ν_1, ν_2. Wir legen nun die projektive Maßbestimmung zu Grunde, deren Fundamentalfläche die η-Kugel ist. Dann hat man, wie Sie mir in Ihrem Briefe vom 7. 9. 07 mitteilten, für die Länge φ der Seite b', a':

$$\cos\varphi = \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1}; \tag{6}$$

ferner erhält man für die Kantenlänge auf b', b'', d. h. für die Länge der Strecke, welche von den Schnittpunkten der Achsen a', a'' und c', c'' mit b', b'' begrenzt wird:

$$\lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}. \tag{7}$$

Wir wollen zunächst die Abhängigkeit der Seitenlänge φ von dem Parameter B diskutieren. Man findet leicht, daß, wenn B einen sehr großen positiven Wert besitzt, l_1 und l_2 positiv sind und daß $l_2 > l_1$. Lassen wir nun B genügend abnehmen, so durchlaufen l_1 und l_2 zunächst bis ∞ wachsend und von hier immer in gleichem Sinne weiterschreitend den Kreis der reellen Zahlen beliebig oft, ohne daß l_1 jemals l_2 einholen oder l_2 um einen ganzen Umlauf l_1 überholen kann.

Es möge nun l_1 k-mal durch 0, ebenso l_2 k-mal durch 0, aber noch nicht $k+1$-mal durch ∞ hindurchgegangen sein, dann ist φ nach geeigneten Festsetzungen von der Form $2k\pi + \psi_1 i$, wobei ψ_1 irgend eine reelle Größe ist. Dieselbe Form hat φ, wenn, was ebensogut möglich ist, l_1 k-mal durch ∞, aber noch nicht k-mal durch 0, l_2 dagegen $k+1$-mal durch ∞ hindurchgegangen ist. Bei der Weiterbewegung muß nun im 1. Falle zunächst l_2 das $k+1$-mal durch ∞, im 2. Falle l_1 das k-mal durch 0 hindurchgehen. Beidemal ist $\varphi = 2k\pi$ und wächst dann reell bleibend auf $(2k+1)\pi$,

bis $_1$ das $k+1$-mal durch ∞ oder l_2 das $k+1$-mal durch 0 geht. Welches von beiden Ereignissen auch zuerst eintreffen mag, φ wird beim Eintreffen jedes der beiden Ereignisse den Wert $(2k+1)\pi$ besitzen, dazwischen aber die Form $(2k+1)\pi+\psi i$ haben. Nachdem aber beide Ereignisse eingetroffen sind, wird φ wieder rein reell sein und die Werte zwischen $(2k+1)\pi$ und $2(k+1)\pi$ durchlaufen, bis l_1 das $(k+1)$-mal durch 0 oder l_2 das $(k+2)$-mal durch ∞ hindurchgeht. Damit sind wir aber bei dem Ausgangspunkte angelangt, wenn wir dort k mit $k+1$ vertauschen.

Daraus entnehmen wir, daß wir B stets so bestimmen können, daß die Seite b', a' einen vorgeschriebenen reellen Wert annimmt, während wir, wenn die Seitenlänge die Form $k\pi+\psi i$ haben soll, zwar für die ganze Zahl k aber nicht für ψ einen beliebig großen Wert vorschreiben dürfen. Auf den tiefer liegenden Grund dieser bemerkenswerten Tatsache werde ich ein anderes Mal näher eingehen.

Um zu zeigen, daß durch Vorgabe einer reellen Seitenlänge B im allgemeinen eindeutig bestimmt ist, bedient man sich des Verfahrens, das Sie in Ihren autographierten Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen von 1894 Seite 379 für den Fall $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}$ entwickeln und das für den allgemeinen Fall nur ganz wenig zu modifizieren ist. Wie Sie mir neulich mitteilten, haben Sie ja auch im Wintersemester 1906/07 in Ihrem Seminar darüber vorgetragen.

Ich komme nun zur Behandlung der Kantenlänge, welche etwas komplizierter ist, weil man Intervalle der x-Axe neben einander zu betrachten hat; man muß sogar alle 4 Intervalle in Betracht ziehen, wenn man den Karakter des ganzen Viereckes untersuchen will.

Hierbei ist nun das Vorzeichen von A von ausschlaggebender Bedeutung. Es gilt nämlich der Satz: Ist A positiv, so besitzt höchstens die eine der beiden nicht durch d' gehenden Seiten eine Länge mit von 0 verschiedenem reellen Teile. Ist A negativ, so hat mindestens die eine dieser beiden Seiten ein Länge mit von 0 verschiedenem reellen Teile. Um also das Viereck vollständig behandeln zu können, müssen wir die 4 Differentialgleichungen betrachten, welche entstehen, wenn wir nacheinander die verschiedenen singulären Punkte in das Unendliche werfen. Wir machen den in das Unendliche geworfenen Punkt durch Hinzufügung eines Index an A kenntlich, so daß wir, wenn d im Unendlichen liegt, A_d schreiben. Dann sind 3 Fälle möglich, denen sehr einfache Ungleichungen für die Winkel unseres Vierecks entsprechen:

I. $A_a > 0$, $A_b > 0$, $A_c > 0$, $A_d > 0$; was z. B. eintritt, wenn $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, $\beta \leqq \frac{1}{2}$, $\gamma \leqq \frac{1}{2}$, $\delta \leqq \frac{1}{2}$.

II. $A_a < 0$, $A_b < 0$, $A_c < 0$, $A_d > 0$;

III. $A_a < 0$, $A_b < 0$, $A_c < 0$, $A_d < 0$.

Der Fall I ist der wichtigste. Man findet für diesen durch Anwendung der einfachsten Stetigkeitbetrachtungen, wie man sie etwa bei der Lehre von den reellen Wurzeln reeller Gleichungen benützt, folgenden Fundamentalsatz:

Schreibt man neben den Winkeln und den singulären Punkten der Differentialgleichung für irgend eine Kante des Kerns eine reelle Länge vor, verlangt man ferner, daß sich irgend eine Seitenlänge des Viereckes in der Form $k\pi + \psi i$ darstellen läßt, wo k eine gegebene ganze Zahl ist, so gibt es dazu mindestens einen Parameterwert B. Ist hierbei k ungerade, so gibt es mindestens 2 Kanten, welche die Eigenschaft haben, daß B auch eindeutig festgelegt ist, wenn man für eine von ihnen eine reelle Kantenlänge vorschreibt.

Als Spezialfall ist hierin natürlich der von Ihnen gewünschte Beweis für das Grundtheorem der automorphen Funktionen und die dazugehörigen Obertheoreme enthalten, da ja nur die Länge irgend einer Kante verschwinden muß, damit das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt; k entspricht in diesem Falle der Zahl der Schnittpunkte einer Viereckseite mit dem hier stets reellen Orthogonalkreis; die gegenüberliegende Seite hat dieselbe Zahl von Schnittpunkten mit dem Orthogonalkreis, während die beiden anliegenden Seiten ihn überhaupt nicht schneiden.

Die Fälle II und III unterscheiden sich nun nur durch das Grundtheorem wesentlich von dem Falle I.

Im Fall II ist nämlich beim Grundtheorem zwar auch der Orthogonalkreis reell, doch wird dieser schon beim Grundtheorem von einer Seite und einer ihr anliegenden Seite geschnitten. Im Falle III ist beim Grundtheorem der Orthogonalkreis imaginär, wir kommen auf ein gewöhnliches sphärisches Viereck, eine Tatsache, die für die Theorie der Minimalflächen von Bedeutung ist. Die Obertheoreme haben auch im Falle II und III denselben Karakter wie im Falle I.

Die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf den Fall von n reellen singulären Punkten ist mit gar keinen Schwierigkeiten verbunden, ebenso kann man sich unschwer von den Ungleichungen 1

befreien, allerdings unter Aufgabe der Sätze über Eindeutigkeit, die hier überhaupt nicht mehr zu gelten brauchen, wie man an dem sehr instruktiven Beispiel von 3 singulären Punkten schon sieht. Speziell erhält man so eine sehr tief gehende Aufklärung über die gestaltlichen Verhältnisse bei Vierecken und n-Ecken; denn nicht nur, daß man, wie ich Ihnen schon neulich mitteilte, die von Ihnen für das Dreieck, von Herrn Ihlenburg für das Viereck aufgestellten „Ergänzungstheoreme" allgemein für die n-Ecke auf besonders einfache Weise erhält, kommt man durch Weiterführung der oben durch I, II, III gegebenen Fallunterscheidung zu einer Einteilung der Vierecke und allgemeiner der n-Ecke, die auf sehr leichte Weise alle möglichen Typen aufzählen und zeichnen läßt.

Zur Zeit bin ich damit beschäftigt, die Untersuchung auf den Fall auszudehnen, daß die singulären Stellen der Differentialgleichung auch komplexe Werte annehmen können. Ich hoffe, daß ich in nicht zu langer Zeit auf diese Weise zu den von Ihnen gewünschten Beweisen für die ganz allgemeinen Sätze komme, in denen die Fundamentaltheoreme der automorphen Funktionen als Spezialfälle enthalten sind.

Erlangen, den 29. 4. 08.

Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben.

Von

W. Ritz.

Vorgelegt von Herrn C. Runge in der Sitzung vom 16. Mai 1908.

Bei den Randwertaufgaben der mathematischen Physik besteht in vielen Fällen die Forderung, eine bei bestimmten Stetigkeits- und Randbedingungen durch ein Minimalprinzip definierte Funktion innerhalb eines gegebenen, endlichen Bereichs darzustellen. Zu diesem Zweck eignen sich bekanntlich Potenzreihen nur ausnahmsweise, während es immer möglich ist, die Funktion nebst einigen ihrer Ableitungen durch ein Polynom von genügend hohem Grade, durch die ersten Glieder einer Fourierreihe oder ähnliche Ausdrücke innerhalb des ganzen Bereichs mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit darzustellen. Die Berechnung der Koeffizienten bietet keine Schwierigkeit falls die Funktion numerisch gegeben ist, und es wird in den in der Praxis vorkommenden Fällen meist ein Polynom von niedrigem Grade die Funktion mit genügender Annäherung darstellen. In dieser Form werden häufig die Resultate der Beobachtung zusammengefaßt; soll das Ergebnis mit der Theorie verglichen werden, so erhebt sich die Forderung, die Koeffizienten a_i eines Polynoms oder allgemeiner eines Ausdrucks der Form

$$1) \qquad w_m = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots a_m\psi_m$$

wo die ψ_i geeignete analytische Funktionen sind, aus den Randbedingungen und der Differentialgleichung so zu bestimmen, daß sie, bei gegebenem m, von der gesuchten Lösung möglichst wenig abweichen; wobei der Fehler mit wachsendem m verschwinden muß.

Bei vielen Variationsproblemen läßt sich nun ein zur numerischen Rechnung geeignetes Verfahren angeben, welches in engster Beziehung zum Dirichletschen Prinzip steht, und, da es einen einfachen Konvergenzbeweis zuläßt, dieses Prinzip (für das betreffende Problem) streng zu begründen erlaubt, wenn man noch die von D. Hilbert zu ähnlichen Zwecken entwickelte neue Methode der Variationsrechnung heranzieht. Dies Verfahren soll im Folgenden am Problem des Gleichgewichts ringsum eingespannter, elastischer Platten entwickelt werden. Die Verallgemeinerung und die numerische Durchführung einzelner Fälle, die sich übrigens von selbst ergibt, sei einer ausführlicheren Mitteilung vorbehalten.

Sei w die (sehr kleine) Verschiebung eines Punktes der Platte aus seiner ursprünglichen Lage, senkrecht zur Ebene der Platte, so ist die zu approximierende Funktion w (x, y) durch folgende Bedingungen definiert:

1. sie ist eindeutig, endlich und stetig nebst ihren Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung innerhalb der Platte R;

2. auf dem Rande L der Platte erfüllt sie die Bedingungen

$$w = 0, \; \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \text{ also auch } \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

3. sie genügt im Innern der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \equiv \Delta\Delta w = f(x, y) \tag{2}$$

wo f eine dem auf die Platte ausgeübten Normaldruck proportionale, endlich, stetige Funktion ist, die numerisch gegeben sei. Diese Forderung ist äquivalent mit der andern, es möge das Integral

$$J = \iint_R \left\{ \tfrac{1}{2} (\Delta w)^2 - wf \right\} dx\, dy \tag{3}$$

(welches im Wesentlichen die potentielle Energie der deformierten Platte darstellt, nebst der Arbeit des Druckes) für w ein Minimum werden.

Daß dieses Integral jedenfalls eine untere Grenze besitzt — wenn sie auch vielleicht nicht erreicht wird — erkennt man leicht durch Einführung des partikulären Integrals von 2)

$$w_1(x, y) = -\frac{1}{8\pi}\iint r^2 \log r\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta^2)$$

Für alle w, die den Bedingungen 1. und 2. genügen, läßt sich dann J in der Form schreiben

$$J = \tfrac{1}{2}\iint [\varDelta (w - w_1)] \, dx \, dy + K$$

wo K die numerisch bestimmte Größe

$$K = \iint\limits_R \left\{ \tfrac{1}{2} (\varDelta w_1)^2 - f w_1 \right\} dx \, dy + \int\limits_L \left(w_1 \frac{\partial \varDelta w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_1}{\partial n} \varDelta w_1 \right) ds$$

bedeutet.

Man setze $\psi_0 = o$ und wähle die ψ_i so, daß sie den Bedingungen 1) und 2) genügen, und daß zwischen ihnen keine identische lineare Realation mit konstanten Koeffizienten bestehe; dann erfüllt w_m die Bedingungen 1) und 2) für jedes System der a_i, und verschwindet identisch nur wenn $a_1 = a_2 = \cdots a_m = o$. Wir suchen nun die Koeffizienten a_i des Ausdrucks

$$w_m (x, y) = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \cdots a_m \psi_m$$

so zu bestimmen, daß w_m bei gegebenem m eine möglichst gute Approximation von w darstelle; die fundamentale Wichtigkeit der Energie für den gesamten physikalischen Vorgang legt es nahe, die Abweichung der Gesamtenergie von ihrem theoretischen Wert als Maßstab des (bisher noch nicht definierten) Gesamtfehlers zu nehmen und diese Abweichung möglichst klein zu machen. Mit andern Worten, wir haben die a_i so zu wählen, daß die der Deformation w_m entsprechende Energie resp. das Resultat der Einführung von w_m statt w unter das Integralzeichen

$$J_m = \iint\limits_R \left\{ \tfrac{1}{2} (\varDelta w_m)^2 - f w_m \right\} dx \, dy$$

möglichst klein werde. Da nun J_m eine quadratische Funktion der a^i allein ist und x und y gar nicht enthält, handelt es sich hier um ein gewöhnliches Maximum und Minimum Problem, welches durch das System der in den Unbekannten a_i linearen Gleichungen

$$5) \qquad \frac{\partial J_m}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J_m}{\partial a_2} = 0 \ldots \frac{\partial J_m}{\partial a_m} = 0$$

gelöst wird. Setzt man

$$6) \qquad \alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \iint\limits_R \varDelta \psi_p \varDelta \psi_q \, dx \, dy; \quad \alpha_p = \iint\limits_R f \psi_p \, dx \, dy$$

so lautet das Gleichungssystem

5a) $$\sum_{p=1}^{m} \alpha_{pq} a_p = \alpha_q, \qquad q = 1, 2 \dots m$$

Die Lösung von 5) und 5a) ist immer möglich und eindeutig bestimmt, weil die quadratische Form

$$\sum_1^m \sum_1^m \alpha_{pq} a_p a_q = \tfrac{1}{2} \iint_R (\varDelta w_m)^2 \, dx\, dy$$

stets positiv ist und nur verschwindet, wenn identisch $\varDelta w_m \equiv 0$ ist, was, da $w_m = 0$ am Rande ist, die Identität $w_m \equiv 0$, und somit $a_1 = a_2 = \cdots a_m = 0$ erfordert. Die Determinante des Systems verschwindet also nicht.

Es muß hervorgehoben werden, daß die α_i durch rein numerische Quadratur, wobei keinerlei veränderlicher Parameter vorkommt, definiert sind: die praktische Durchführung dieser Quadraturen bei gegebener Genauigkeit bietet also keine Schwierigkeit.

Ich beweise nun, daß $\lim_{m=\infty} w_m$ existiert und die gesuchte Lösung ist (bei geeigneter Wahl der ϕ_i).

Sind A_i willkürliche Zahlen und

7) $$\zeta_m(x, y) = A_1 \psi_1 + \cdots A_m \psi_m$$

so lassen sich die Gleichungen 5) dahin zusammenfassen, es müsse für jedes Wertesystem der A_i die Gleichung bestehen

8) $$\iint \{\varDelta w_m \varDelta \zeta_m - f \zeta_m\} \, dx\, dy = 0$$

Für einen neuen Index $m + n > m$ erhält man in analoger Weise eine neue Approximation w_{m+n} mit anderen Koeffizienten a_i, und es soll nun gezeigt werden, daß diese Approximationen gleichmäßig konvergieren. Wir setzen $\varphi = w_{m+n} - w_m$ und bilden die Differenz der Minimalwerte von J

$$J^{(0)}_{m+n} - J^{(0)}_m = \iint \{\tfrac{1}{2}(\varDelta w_m + \varDelta \varphi)^2 - f(w_m + \varphi)\} \, dx\, dy$$
$$- \iint \{\tfrac{1}{2}(\varDelta w_m)^2 - f w_m\} \, dx\, dy = \iint \{\varDelta w_m \varDelta \varphi - f\varphi\} \, dx\, dy + \tfrac{1}{2} \iint (\varDelta \varphi)^2 \, dx\, dy$$

und schreiben 8) für den Index $m + n$ in der Form

$$\iint \{(\varDelta w_m + \varDelta \varphi) \varDelta \zeta_{m+n} - f \zeta_{m+n}\} \, dx\, dy = 0$$

Setzt man insbesondere $\zeta_{m+n} = \varphi$, was erlaubt ist, so wird

$$\iint \{\varDelta w_m \varDelta \varphi + (\varDelta \varphi)^2 - f\varphi\} \, dx\, dy = 0$$

und somit

9) $$J^{(0)}_{m+n} - J^{(0)}_m = -\tfrac{1}{2} \iint (\varDelta \varphi)_2 \, dx\, dy, \quad \varphi = w_{m+n} - w_m.$$

Die $J_m^{(0)}$ bilden also, wie vorauszusehen war, eine stets abnehmende Reihe von Zahlen, die aber, wie oben gezeigt, größer als eine bestimmte untere Schranke bleiben. Sie konvergieren also, und es läßt sich bei gegebenem ε ein $m = M$ so bestimmen, daß für jedes $m > M$ und beliebige n die Ungleichung

$$\iint_R (\varDelta\varphi)^2 \, dx \, dy < \varepsilon \tag{10}$$

bestehe. Hieraus folgt zwar nicht, daß $\varDelta\varphi$, wohl aber daß φ gegen Null konvergiert. Denn, wegen $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ am Rande ist identisch im Innern von R

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_R \log r \, \varDelta\varphi \, d\xi \, d\eta, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

Sei D das Gebiet, wo (bei gegebenem x, y), $|\varDelta\varphi| > \log r \sqrt{\varepsilon}$, und D' das Gebiet, wo $|\varDelta\varphi| \leqq \log r \sqrt{\varepsilon}$ ist. Dann ist

$$2\pi |\varphi(x, y)| < \iint_D \frac{(\varDelta\varphi)^2}{\sqrt{\varepsilon}} d\xi \, d\eta + \iint_{D'} \log^2 r \sqrt{\varepsilon} \, d\xi \, d\eta < \iint_R \frac{(\varDelta\varphi)^2}{\sqrt{\varepsilon}} d\xi \, d\eta$$
$$+ \sqrt{\varepsilon} \iint_R \log^2 r \, d\xi \, d\eta.$$

Das zweite Integral ist konvergent, wie man etwa durch Einführung von Polarkoordinaten sieht; sei K sein größter Wert innerhalb R; dann folgt nach 10)

$$2\pi |\varphi(x, y)| < \sqrt{\varepsilon}\,(1 + K)$$

Die rechte Seite ist von x, y und n unabhängig; bei gegebenem ε' kann man immer für jedes x, y u. n die Größe $|\varphi| = |w_{m+n} - w_m|$ kleiner als ε' machen, sobald m einen bestimmten Wert übersteigt; man hat bloß die willkürliche Zahl ε und dementsprechend M so zu wählen, daß

$$\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{1 + K}\right)^2 \varepsilon'^2$$

sei.

Die Approximationen w_m konvergieren also im ganzen Gebiet R gleichmäßig gegen eine endliche, stetige Grenzfunktion $w(x, y)$.

Gleiches läßt sich in analoger Weise von den Ausdrücken

$$\int_\alpha^x \frac{\partial w_m}{\partial y}\,dx, \quad \int_\beta^y \frac{\partial w_m}{\partial x}\,dy, \quad \int_\alpha^\beta \frac{\partial w_m}{\partial n}\,ds$$

zeigen, wo die geraden Linienstücke $\alpha \ldots x$, resp. $\beta \ldots y$, resp. die Kurve $\alpha \ldots \beta$ ganz innerhalb R liegen und n die Normale zur Kurve bedeutet.

Unsere Wahl der Annäherungsfunktionen w_m, welche das Integral J immer kleiner machen, bedingt also die Konvergenz in allen Fällen. Soll aber w die Lösung des Problems sein, d. h. soll der Grenzpunkt der $J_m^{(0)}$ mit dem Grenzwert von J für irgendwelche den Bedingungen 1), 2) genügende Funktionen w sicher zusammenfallen, so müssen die ψ_i der weiteren Bedingung unterworfen werden, daß jede solche Funktion w nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ beliebig angenähert durch einen Ausdruck der Form $a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots a_m\psi_m$ und seine entsprechenden Ableitungen darstellbar sei. Wenn ferner die ψ_i derart gewählt wären, daß aus dem Unendlichkleinwerden des Integrals $\iint[\Delta(w_{m+n} - w_m)]^2\,dx\,dy$ auf das des Integranden geschlossen werden dürfte (ein Fall, der wohl praktisch der allein in Betracht kommende ist[1]), besonders wenn man nur eine bestimmte Approximation verlangt), so würde man auch auf die Konvergenz von Δw_m, $\frac{\partial w_m}{\partial x}$, $\frac{\partial w_m}{\partial y}$, schließen können, und es wäre $w = \lim w_m$ die gesuchte Funktion.

Über die Singularitäten, die unter den vorliegenden Umständen (z. B. bei Entwickelungen nach Polynomen) möglich sind, ist jedoch wenig bekannt, so daß eine weitere Verschärfung der Bedingungen, welchen die ψ_i zu unterwerfen sind, zur Durchführung des Beweises nötig wird.

Wir nennen abkürzend **Hauptableitungen** einer Funktion die Ableitungen $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x_m \partial y_n}$, $m = 0, 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2, 3$. Die ψ_i haben nun die Bedingungen zu erfüllen:

1. sie sind, nebst ihren Hauptableitungen, in R und auf L endlich und stetig;

2. auf L ist $\psi_i = 0$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0$, somit $\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = 0$ für jedes i;

---

1) Im entgegengesetzten Falle muß nämlich die Fläche $z = \Delta w_m$ bei genügend großem m Singularitäten „haarförmiger Art“ aufweisen.

3. es besteht keine Identität der Form $b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \cdots b_m\psi_m \equiv 0$, wenn nicht alle b verschwinden;

4. sei $\zeta(x,y)$ eine abteilungsweise analytische Funktion, die nebst ihren Hauptableitungen endlich und stetig ist, und nur innerhalb eines ganz in R gelegenen Rechtecks ϱ von Null verschieden ist, wobei Größe und Lage von ϱ willkürlich bleiben. Wir setzen voraus, daß es möglich sei, die Koeffizienten Ai und den Index m des Ausdruckes

$$\zeta_m = A_1\psi_1 + A_2\psi_2 + \cdots A_m\psi_m$$

so zu bestimmen, daß $\zeta - \zeta_m$ und seine Hauptableitungen in R kleiner als eine vorgegebene Größe bleiben, wie auch im übrigen ζ gewählt sei (also $\lim \zeta_m = \zeta$ etc., wobei die Konvergenz eine gleichmäßige sei.

Es ist leicht, Funktionen ψ_i zu bilden, die diese interpolatorischen Eigenschaften besitzen. Die Gleichung der Randkurve L läßt sich immer auf die Form bringen

$$F(x,y) = 0$$

wo $\frac{\partial F}{\partial n}$ nicht identisch verschwindet und F im Innern von R von Null verschieden ist, im übrigen nebst seinen Hauptableitungen stetig und endlich bleibt. Für eine stetig gekrümmte Berandung wird die Gleichung oft von vornherein in dieser Form erscheinen; für ein konvexes Polygon mit den Seiten $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$ kann man setzen

$$F = \Pi(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i)$$

Für andere Polygone und zusammengesetzte Kurven ist F auch meist leicht zu bilden, was hier nicht ausgeführt werden soll.

Die Funktion $\frac{\zeta}{F^2}$ ist dann nur innerhalb ϱ von Null verschieden und nebst ihren Hauptableitungen stetig und endlich. Wir legen den Koordinatenursprung in eine Ecke eines R enthaltenden Vierecks. Welches im übrigen auch ζ und ϱ seien, läßt sich eine solche Funktion nebst ihren Hauptableitungen in der Form

$$\frac{\zeta}{F^2} = \Sigma\Sigma A_{mn} P_m\left(\frac{x}{a}\right) P_n\left(\frac{y}{a}\right) = \Sigma\Sigma B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a} \text{ usw.,}$$

wo P_m, P_n Legendre'sche Polygone, a die Seite des Vierecks bedeuten, darstellen, wie durch Integration der entsprechenden,

gleichmäßig konvergenten Reihen für $\frac{\partial^6 \frac{\zeta}{F^2}}{\partial x^3 dy^3}$ unter Berücksichtigung des identischen Verschwindens von ζ außerhalb R ohne weiteres folgt[1]). Setzt man also

$$11)\quad \psi_{mn} = F^2 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}, \quad \text{oder } \psi'_{mn} = F^2 P_m\left(\frac{x}{a}\right) P_n\left(\frac{y}{a}\right)$$

so wird

$$\sum_{m,n=1}^{M} A_{mn}\psi_{mn}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{m,n=1}^{M} B_{mn}\psi'_{mn}$$

gleichmäßig gegen ζ konvergieren, und gleiches gilt von den Hauptableitungen; es ist z. B.

$$\lim_{M=\infty} \sum^{M} A_{mn} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial x}$$

$$= \lim_{M=\infty} \left[\frac{\partial (F^2)}{\partial x} \sum^{M} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a} + F^2 \sum^{M} A_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}\right]$$

Der Limes der Klammer ist aber gleich $\frac{\zeta}{F^2}\frac{\partial F^2}{\partial x} + F^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta}{F^2}\right) = \frac{\partial \zeta}{\partial x}$

Da ferner auch auf L außer $\psi_{mn} = 0$ noch gilt

$$\frac{\partial \psi_{mn}}{\partial x} = 2F\left\{\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 2 \sin\frac{m\pi x}{a} + F\frac{m\pi}{a} \cos\frac{m\pi x}{a}\right\} \sin\frac{n\pi y}{a} = 0,$$

und ebenso $\frac{\partial \psi_{mn}}{\partial y} = 0$, so erfüllen die ψ_{mn} alle vorgeschriebenen Bedingungungen.

Bei konvexen Polygonen wird man den Ansatz ψ'_{mn} bevorzugen, da F selbst ein Polynom ist; die Quadraturen lassen sich dann in terminis finitis ausführen.

Daß man auch auf manche andere Weise, insbesondere durch Einführung neuer Variabelen geeignete Funktionen ψ_i bilden kann, ist selbstverständlich und soll hier nicht näher ausgeführt werden.

Um nun bei diesen Voraussetzungen über die ψ_i zu zeigen,

---

1) Auf dem Rande und auf den Kurvenstücken, auf denen F verschwindet und die außerhalb R, aber innerhalb des Quadrats gelegen sind, hat $\frac{\zeta}{F^2}$ zunächst die Form $\frac{0}{0}$; die Entwickelungen ergeben hier bekanntlich den aus der Stetigkeit folgenden Wert, also 0.

daß $w = \lim_{m=\infty} w_m$ wirklich das Integral J zu einem Minimum macht und somit die gesuchte Lösung ist, benutzen wir eine im wesentlichen von Herrn Hilbert[1]) gegebene Methode.

Wir setzen zunächst die nur innerhalb R definierten Funktionen ψ_i und f außerhalb dieses Bereichs gleich Null, wobei für ψ_i, $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial y}$ wegen der Randbedingungen die Stetigkeit nicht verletzt wird; ferner legen wir die Koordinatenachsen in der Weise daß sie keinen Punkt mit R gemein haben. Sei dann

$$U_m(x, y) = \int_0^y\int_0^y\int_0^y\int_0^x\int_0^x\int_0^x w_m\, dx^3\, dy^3;$$

$$F(x, y) = \int_0^y\int_0^y\int_0^y\int_0^x\int_0^x\int_0^x f(x, y)\, dx^3\, dy^3$$

so konvergieren, wie oben bewiesen wurde, U_m und seine Ableitungen bis zur 4. Ordnung, ferner

$$\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^4 \partial y^2} = \int_0^y \frac{\partial w_m}{\partial x} dy,\quad \frac{\partial^6 U_m}{\partial y^4 \partial x^2},\quad \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^4 \partial y},\quad \frac{\partial^5 U_m}{\partial y^4 \partial x},$$

gleichmäßig gegen eine Funktion U und ihre entsprechenden Ableitungen; ferner sind

$$\frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4 \partial y^3} = \frac{\partial w_m}{\partial x},\quad \frac{\partial^7 U_m}{\partial y^4 \partial x^3} = \frac{\partial w_m}{\partial y},\quad \frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3 \partial y^3} = w_m$$

auf L gleich Null. Durch partielle Integrationen läßt sich dann die Gleichung (8) in die Form bringen

$$0 = \iint_R [\Delta\Delta U_m - F] \frac{\partial^6 \zeta_m}{\partial x^3 \partial y^3} dx\, dx + \int_L \Psi\, ds$$

wobei im Randintegral alle Glieder in U_m die nicht verschwinden, konvergent sind, und nur die Hauptableitungen von ζ_m vorkommen. Endlich konvergieren auch die im Doppelintegral auftretenden Ableitungen $\frac{\partial^4 U_m}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 U_m}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 U_m}{\partial x^4}$. Die noch willkürlichen Koeffizienten A_i die in ζ_m eingehen wählen wir so daß gleichmäßig $\lim \zeta_m = \zeta$, wobei ζ irgend eine Funktion der oben definierten Art

1) D. Hilbert. Über das Dirichletsche Prinzip. Festschrift der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-physik. Klasse, Berlin 1901.



sei; gleiches kann, nach Voraussetzung, auch für die Hauptableitungen angenommen werden. Unter diesen Umständen können wir zum Limes übergehen, und da ζ nur innerhalb ϱ von Null verschieden ist verschwindet das Linienintegral, und es wird für jedes solche ζ

$$12)\qquad 0 = \int\int_{\varrho} (\varDelta\varDelta U - F)\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3}\,dx\,dy.$$

Nun beweist aber Herr Hilbert a. a. O. folgendes Lemna:

Sei ζ eine innerhalb des Rechtecks einschließlich dessen Seiten mit ihren Hauptableitungen endliche, stetige, abteilungsweise analytische Funktion, die auf den Seiten $x = a$, $x = a'$ des Rechtecks den Bedingungen $\zeta = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$ genügt; auf den Seiten $y = b$, $y = b'$, den Bedingungen $\zeta = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0$. Wenn dann für jedes solche ζ das Integral

$$\int\int_{\varrho} \Phi(x, y)\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3}\,dx\,dy$$

verschwindet, wo Φ eine in ϱ einschließlich der Seiten stetig verlaufende Funktion ist, so ist notwendig Φ von der Form

$$\Phi = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2$$

wo $X_0 X_1 X_2$ stetige Funktionen von x allein; Y_0, Y_1, Y_2 solche von y allein sind.

Dieser Hilfsatz ist auf (12) anwendbar; denn aus der Hilbertschen Bedingung $\zeta = 0$ für $x = a$ folgt auch $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0, \ldots$, ebenso folgt aus $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ für $x = a$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} = 0$, u. s. w., so daß sämtliche Hauptableitungen von ζ, mit Ausnahme von $\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3}$, auf den Rändern des Rechtecks verschwinden müssen; da ferner die spezielle Gestalt von ζ, die Herr Hilbert zu seinem Beweise benutzt, auch die Bedingung $\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3} = 0$ am Rande erfüllt, kann auch diese Bedingung ζ auferlegt werden: es schließen sich also, mit andern Worten, die Werte von ζ und dessen Hauptableitungen stetig am Rande an die äußern Werte, nämlich Null, an. Die von Herrn Hilbert gestellten Bedingungen

sind also äquivalent den oben sub 4°) über ζ gemachten Voraussetzungen. Es folgt somit

13) $$\Delta\Delta U - F = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2$$

im Innern des Rechtecks ϱ. Setzt man endlich, unter (α, β) die Koordinaten einer Ecke von ϱ verstanden,

$$V = U - \int_\alpha^x\int_\alpha^x\int_\alpha^x\int_\alpha^x dx^4 [X_0 + y X_1 + y^2 X_2]$$
$$-\int_\beta^y\int_\beta^y\int_\beta^y\int_\beta^y dy^4 [Y_0 + x Y_1 + x^2 Y_2] + 2\int_\alpha^x dx^6 . X_2 + 2\int_\beta^y dy^6 Y_2$$

so erhält man

14) $$\Delta\Delta V = F(x, y).$$

wo V und seine Ableitungen bis zur 4. Ordnung stetig sind. Nach Mathieu ist aber bei dieser Gleichung der Ausdruck des Greenschen Satzes der folgende:

$$V(x, y) = -\frac{1}{8\pi}\int_\varrho\int r^2 \log r\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + T, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

wo T ein über den Rand von ϱ genommenes Linienintegral ist welches im Innern eine analytische, der Gleichung $\Delta\Delta T = 0$ genügende Funktion darstellt.

Aus diesem Satze, welcher nur als Ausdruck der Stetigkeitseigenschaften der Integrale partieller Differentialgleichungen uns wichtig ist, folgt zunächst

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{8\pi}\int\int \frac{\partial}{\partial x}(r^2 \lg r)\, F\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial T}{\partial x}\\ &= +\frac{1}{8\pi}\int\int \frac{\partial}{\partial \xi}(r^2 \lg r)\, F\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial T}{\partial x}\\ &= -\frac{1}{8\pi}\int\int r^2 \log r\, \frac{\partial F}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta + T'\end{aligned}$$

wo T' dieselben Eigenschaften hat, wie T. Man erhält durch Wiederholung derselben Operation, und wegen $\frac{\partial^6 F(\xi, \eta)}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} = f(\xi, \eta)$

$$\frac{\partial^6 V}{\partial x^3 \partial y^3} = \frac{\partial^6 U}{\partial x^3 \partial y^3} = w = -\frac{1}{8\pi}\int\int r^2 \lg r\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + T''$$

woraus folgt:

Die Funktion $w = \lim_{m=\infty} w_m$ besitzt im ganzen Rechteck ϱ endliche, stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung und genügt der Gleichung

16) $$\Delta\Delta w = f(x, y)$$

und da die Lage und Größe von ϱ willkürlich sind, gilt dieser Satz im Innern der ganzen elastischen Platte R.

Aus $w = \lim\limits_{m=\infty} w_m$ folgt ferner daß w am Rande verschwindet, und gleiches gilt von $\frac{\partial w}{\partial n}$ wie sich aus dem Satze

$$\lim \int_\alpha^\beta \frac{\partial w_m}{\partial n}\, ds = \int_\alpha^\beta \frac{\partial w}{\partial n}\, ds$$

leicht folgen läßt.

Es ist also w die gesuchte Lösung, die wir somit im engsten Anschluß an das Dirichletsche Prinzip konstruiert haben; womit gleichzeitig bewiesen ist, daß das Minimum des Integrals auch wirklich erreicht wird.

Daß sich diese Methode ohne Schwierigkeit auf andere Probleme ähnlicher Art, insbesondere auf das klassische Problem von Dirichlet, ausdehnen läßt, soll an anderer Stelle ausgeführt werden. Hier möge noch an einem Beispiel gezeigt werden daß sie sich auch, und zwar mit Vorteil, auf die Eigenschwingungen elastischer Körper anwenden läßt.

Die Gleichung der Eigenschwingungen einer Saite läßt sich in der Form schreiben

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 y = 0, \text{ mit } y(+1) = 0,\ y(-1) = \text{ an den Enden,}$$

eine Forderung die aus dem Minimumwerden des Integrals

$$J = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

mit der Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} y^2\, dx = 1$$

sich ergibt. Wir suchen die Lösung, die in diesem speziellen Falle durch trigonometrische Funktionen gegeben ist, nach der allgemeinen Methode durch Polynome zu approximieren. Das allgemeinste Polynom welches den Symmetrie- und Randbedingungen der Fundamentallösung genügt, ist

$$y_n = (x^2 - 1)[a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^4 + a_n x^n].$$

Ist also λ_n ein Lagrangescher Faktor, so haben wir die a_i so zu wählen daß

$$\int_{-1}^{+1} \left\{\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 - \lambda_n y_n^2\right\} dx = \text{Min}, \text{ mit } \int_{-1}^{+1} y_n\, dx = 1.$$

Dies gibt ein System linearer, homogener Gleichungen für die a_i, dessen Determinante verschwinden muß, wodurch sich λ_n bestimmt als kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades. Dieses λ_n konvergiert rapide gegen das $\varkappa^2 = \frac{\pi^2}{4}$ der Fundamentallösung $y = \cos\frac{\pi x}{2}\cdot$ Für $n = 1$ ist $2\lambda_1 = 5$; für $n = 2$ ergibt sich $2\lambda_2 = 4{,}93488\ldots$; für $n = 3$, $2\lambda_3 = 4{,}934.802.217\ldots$ während $2\varkappa^2 = \frac{\pi^2}{2} = 4{,}934.802.200\ldots$ ist. Der Fehler ist also bei der dritten Approximation drei Milliardstel. Bei den Obertönen (größere Wurzeln der algebraischen Gleichungen in λ_n) ist er wesentlich größer. Es weicht ferner y_n von y in dritter Approximation nur in der sechsten Stelle ab. Da aus den Gleichungen folgt

$$\lambda_n = \text{Min}\left\{\int_{-1}^{+1}\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx\right\}$$

so ergibt sich von vornherein daß die Schwingungszahl des Fundamentaltons das durch die Methode am genauesten gegebene Element ist.

Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann.

par **Eugenio Elia Levi** à Pisa (Italia).

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 16. Mai 1908.

Dans le troisième de ses classiques mémoires sur les équations intégrales[1]), M. Hilbert a réduit à une équation intégrale la résolution du problème de Riemann et d'autres problèmes analogues relatifs à la détermination d'une ou de plusieurs fonctions d'une variable complexe dont les parties réelles et les coefficients de l'imaginaire satisfont sur un contour fermé à certaines rélations linéaires. Je me propose de signaler dans les lignes qui suivent une petite difficulté qu'on rencontre dans le mémoire de M. Hilbert[2]), et de montrer comment on peut mettre le résultat à l'abri de cette objection: j'espère qu'on me pardonnera d'avoir exposé ces considérations tres simples en vue de l'importance fondamentale des résultats de M. Hilbert.

Soit C une courbe fermée, que nous supposerons avec M. Hilbert, pour plus de simplicité, analytique; l sa longueur totale, s (ou σ) l'arc compté sur C à partir d'un point arbitraire. Étant donnée une fonction $f(xy, \xi\eta)$ des deux points $xy, \xi\eta$ désignons par $f(s, \xi\eta)$, $f(xy, \sigma)$, $f(s, \sigma)$ les fonctions auxquelles se réduit f lorsque un des points xy, $\xi\eta$ ou tous les deux viennent sur C. M. Hilbert considère la fonction $A(xy; \xi\eta)$[3]), qui satisfait à l'intérieur de C à l'équation

1) Göttinger Nachr. 1905, Heft 4, pag. 307—338.

2) Cette difficulté m'a été indiquée par M. Levi-Civita.

3) La fonction $A(xy, \xi\eta)$ définie par les conditions qui suivent, renferme encore une fonction arbitraire de $\xi\eta$, mais cela n'a aucune importance pour ce qui suit.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0$$

et sur C à la condition

$$(1) \quad \frac{\partial A(s;\xi\eta)}{\partial n_s} = \frac{\partial \log r(s;\xi\eta)}{\partial n_s} + \frac{2\pi}{l} \quad \left[r(xy;\xi\eta) = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right]$$

où n_s indique la normale intérieure à C dans le point s. Soit

$$(2) \qquad G(xy,\xi\eta) = -\log r(xy,\xi\eta) + A(xy,\xi\eta).$$

Les formules fondamentales d'où découlent tous les raisonnements de M. Hilbert sont la formule

$$(3) \qquad u(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial s} v(s)\,ds + \frac{1}{l}\int_0^l u(s)\,ds$$

[form. (6), pag. 311]

— qui donne les valeurs de la partie réelle u d'une fonction $u+iv$ d'une variable complexe, donnée dans le champ intérieur à C, par les valeurs que prend sur C le coefficient v de l'imaginaire —, et les formules analogues (7) [pag. 311], (11) et (12) [pag. 314] pour les valeurs de v et pour le cas du champ extérieur à C. La fonction $G(s,\sigma)$ est singulière dans le point $s=\sigma$, mais M. Hilbert remarque que $\log r(s,\sigma)$ a la même singularité que la fonction $\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\right|$, et il en conclut que $G(s,\sigma)$ peut être mise sous la forme

$$(4) \qquad G(s,\sigma) = -\log\left|\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}(s-\sigma)\right| + A^*(s,\sigma)$$

$A^*(s,\sigma)$ étant une fonction partout régulière. D'où il suit qu'on a

$$(5) \quad \frac{\partial G(s,\sigma)}{\partial s} = \frac{\pi}{l}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{l}(\sigma-s) + \frac{\partial A^*(s,\sigma)}{\partial s} \text{ [form. (5) pag. 311]}$$

et qu'il suffit de prendre dans la formule (3) comme valeur de l'intégrale la valeur principale, et en outre que dans les équations intégrales déduites par M. Hilbert la partie singulière de ces fonctions disparait complètement.

C'est cette dernière conclusion rélative à la fonction $A^*(s,\sigma)$ qui ne me semble pas tout à fait exacte. Car la fonction $A(xy,\xi\eta)$ est une fonction régulière de xy, $\xi\eta$ seulement quand des points $\xi\eta$ et xy l'un au moins n'appartient pas à C, mais, lorsque les points viennent tous les deux sur C, elle aussi aura une singularité: et d'autre part $A^*(s,\sigma)$ ne diffère de $A(s,\sigma)$ que par une fonction

partout régulière. Heureusement — et c'est ce que je me propose de montrer — la singularité de $A(s, \sigma)$ est d'une nature tout à fait analogue à la singularité de $-\log r(s, \sigma)$; de manière qu'il suffira d'écrire à la place des formules (4) et (5) les formules

$$G(s, \sigma) = -2 \log \left| \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l}(s - \sigma) \right| + A^*(s, \sigma)$$

$$\frac{\partial G(s, \sigma)}{\partial s} = 2 \frac{\pi}{l} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{l}(\sigma - s) + \frac{\partial A^*(s\sigma)}{\partial s}$$

pour que la nouvelle fonction $A^*(s, \sigma)$ soit réellement une fonction régulière de s et de σ, et qu'on puisse répéter tous les raisonnements de M. Hilbert.

Il est donc question d'étudier la fonction $A(xy, \xi\eta)$. Si nous la déterminons par la méthode de Robin, $A(xy, \xi\eta)$ sera donnée par la formule

$$A(xy, \xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C \log r(xy, s)\, \varphi(s; \xi\eta)\, ds$$

où la fonction $\varphi(s, \xi\eta)$ est la solution de l'équation intégrale

$$-\varphi(s, \xi\eta) + \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s} \varphi(\sigma, \xi\eta)\, d\sigma = \frac{\partial \log r(s, \xi\eta)}{\partial n_s} + \frac{2\pi}{l};$$

équation que nous savons avoir toujours une et une seule solution. Posons

$$f(s; \xi\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s} \frac{\partial \log r(\sigma, \xi\eta)}{\partial n_\sigma} d\sigma;$$

$f(s, \xi\eta)$ sera une fonction toujours régulière même lorsque $\xi\eta$ vient sur C. En effet la fonction $\frac{\partial \log r(s, \sigma)}{dn_s}$ est une fonction régulière, et $f(s, \xi\eta)$ n'est autre chose que le potentiel de double couche qui a pour moment $\frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s}$.

Si nous posons donc

$$\varphi(s, \xi\eta) = -\frac{\partial \log r(s, \xi\eta)}{\partial n_s} + \psi(s, \xi\eta),$$

la fonction ψ sera une solution de l'équation intégrale

$$-\psi(s, \xi\eta) + \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s} \psi(\sigma, \xi\eta)\, d\sigma = -f(s, \xi\eta) + \frac{2\pi}{l};$$

et elle sera donc une fonction de s et de $\xi\eta$ régulière même quand

$\xi\eta$ vient sur C: nous pouvons dire que la fonction $\psi(s, \xi\eta)$ devient alors la fonction $\psi(s, \sigma)$ qui est la solution de l'équation

$$-\psi(s, \sigma)+\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma_1)}{\partial n_s}\psi(\sigma_1, \sigma)\, d\sigma_1 = -\frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial \log r(s, \sigma_1)}{\partial n_s}\,\frac{\partial \log r(\sigma_1, \sigma)}{\partial n_{\sigma_1}}\, d\sigma_1 + \frac{2\pi}{l}.$$

On aura donc

$$A(xy, \xi\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \log r(xy, s)\frac{\partial \log r(s, \xi\eta)}{\partial n_s}\, ds + E(xy, \xi\eta)$$

où

$$E(xy, \xi\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C \log r(xy, s)\, \psi(s, \xi\eta)\, ds$$

est une fonction toujours régulière.

Supposons maintenant que, xy étant à l'intérieur de C, $\xi\eta$ vienne dans un point de C: nous aurons alors de la formule précédente

$$A(xy, \sigma) = -\log r(xy, \sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_C \log r(xy, s)\,\frac{\partial \log r(s, \sigma)}{\partial n_s}\, ds + E(xy, s).$$

Et maintenant il suffit de remarquer que l'intégrale de cette dernière formule est un potentiel de simple couche dont la densité est toujours finie et régulière, pour en conclure qu'elle est encore régulière même quand xy vient sur C; et qu'on a donc

$$A(s, \sigma) = -\log r(s, \sigma) + E_1(s, \sigma)$$

où $E_1(s, \sigma)$ est une fonction partout régulière

q. e. d.

Je remarquerai encore que la propriété que nous avons démontré pour la fonction $A(xy, \xi\eta)$ est analogue à la propriété bien connue

$$\lim_{\xi\eta = \sigma} g(xy, \xi\eta) = \log r(xy, \sigma)$$

qu'appartient à la fonction harmonique $g(xy, \xi\eta)$ définie par la condition de prendre les mêmes valeurs que $\log r(xy, \xi\eta)$ sur le contour C; propriété que l'on déduit aisément de la formule

$$g(xy, \xi\eta) = g(\xi\eta, xy).$$

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen.

XX.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Juli 1908.

I. Ueberführung von Nopinon, $C_9N_{14}O$, in β-Pinen, $C_{10}H_{16}$, Camphen und Campher $C_{10}H_{16}O$.

Vor Kurzem habe ich darüber berichtet (Gött. Nachr. 1908, 23), daß bei dem Versuch aus Nopinon durch die Nopinolessigsäure hindurch zum β-Pinen zu gelangen, an Stelle dieses Kohlenwasserstoffs ganz unerwarteter Weise Fenchen erhalten wurde.

Nun habe ich früher schon aus Fenchylchlorid zwei verschiedene Fenchene erhalten, von denen das eine eine bei 153° schmelzende α-Oxysäure $C_{10}H_{16}O_3$ liefert, das andere eine bei 137° schmelzende.

Bei den ersten, neulich mitgeteilten Versuchen, bei denen dem Nopinolessigester mit Hülfe von Kaliumbisulfat Wasser entzogen und nach der Verseifung die entstandene ungesättigte Säure durch trockene Destillation zur Kohlensäureabspaltung gebracht worden war, resultierte nun ein d-Fenchen, welches bei der Oxydation die bei 153° schmelzende Oxysäure lieferte. Die Reaktion ist dann mehrfach — scheinbar unter genau denselben Bedingungen — wiederholt, nunmehr wurde aber immer ein Fenchen erhalten, welches die niedriger schmelzende Säure bei der Oxydation gab. Diese beiden isomeren Fenchene können also augenscheinlich leicht in einander übergehen, was sich übrigens auch schon aus früheren Beobachtungen [Annalen **315**, 281] folgern ließ.

Es war aber auch in keiner Weise anzunehmen, daß das erhaltene Fenchen seine Entstehung aus Nopinolessigsäure einer ganz einfachen Reaktion verdankt. Es mußte versucht werden den Vorgang noch eingehender zu studieren, namentlich in der Hoffnung, daß es schließlich doch möglich sein müsse, das erwartete Spaltungsprodukt der Nopinenessigsäure, nämlich das β-Pinen wirklich zu isolieren.

Nach vielen vergeblichen und mühsamen Versuchen, auf die hier nicht ausführlicher eingegangen werden soll, ist das lange angestrebte Ziel nun auch glücklich erreicht worden. Der Weg, der dazu gedient hat, soll im Folgenden kurz beschrieben werden.

Um die Reaktion, um die es sich handelt, schrittweis aufklären zu können, wurde zunächst versucht das erste Reaktionsprodukt als solches zu isolieren.

Bei der Einwirkung von Zink und Bromessigester auf Nopinon sollte sich nach aller Analogie zunächst der Ester bilden:

CO; CH_2, CH, $(CH_3)_2C$, CH_2, CH_2, CH $\quad + Zn + BrCH_2CO_2R \rightarrow$ HO CH_2CO_2R C; CH_2, CH, $(CH_3)_2C$, CH_2, CH_2, CH

Da früher mehrfach die Erfahrung gemacht worden ist [Annalen **314**, 150; **360**, 31], daß die Oxyester bei der Verseifung gern hydrolytische Spaltung unter Rückbildung des Ausgangsketons erleiden, war bei den ersten Versuchen dem Oxyester sofort Wasser entzogen und dann erst der entstandene ungesättigte Ester verseift worden. Jetzt wurde der Versuch gemacht, der Nopinolessigsäure als solcher habhaft zu werden. Es gelang das auch unerwartet gut.

Der Nopinolessigester ließ sich zum großen Teil unzersetzt verseifen. Es wurde dabei zwar auch Nopinon zurückgebildet, aber doch immerhin etwa 77 % vom zur Reaktion gelangten Nopinon an Oxysäure gewonnen, welche sich als eine leicht isolierbare, gut charakterisierte Verbindung erwies.

Die aus Ligroïn umkrystallisierte Nopinolessigsäure $C_{11}H_{18}O_3$ schmilzt bei 83—85°. Mit Uebergehung aller Versuche, welche sonst mit der Oxysäure angestellt wurden und die an

anderer Stelle mitgeteilt werden, soll hier nur die Versuchsanordnung angegeben werden, unter der die Umwandlung der Säure in Pinen mit Sicherheit gelingt.

30 g Nopinolessigsäure werden mit dem gleichen Gewicht Essigsäureanhydrid auf dem Wasserbad erwärmt. Es erfolgt Lösung und dann lebhaftes Aufsieden. Es wurde nun noch etwa 1/4 Stunde gekocht und die Operation dann unterbrochen. Es ergab sich, daß unter diesen Bedingungen aus der reinen Nopinolessigsäure augenscheinlich schon 2 verschiedene ungesättigte Säuren entstehen. Die eine ist so unbeständig, daß sie sofort Kohlensäure abspaltet und Kohlenwasserstoff liefert, die andere ist beständiger und erleidet die entsprechende Spaltung erst wenn sie der trockenen Destillation unterworfen wird.

Das erhaltene Reaktionsprodukt enthält also außer Essigsäure und Essigsäureanhydrid Kohlenwasserstoff und organische Säure. Man gießt nun die erkaltete Flüssigkeit in Wasser und bläst den vorhandenen Kohlenwasserstoff mit Dampf ab. Dieser Kohlenwasserstoff besteht wesentlich aus β-Pinen. Er wird, wenn er mit Natronlauge gewaschen, nochmals durch Dampfdestillation gereinigt und dann über Natrium rectificiert wird, mit folgenden Eigenschaften erhalten:

Siedepunkt 162—163°. Die sonstigen physikalischen Konstanten wurden an Präparaten, welche aus verschiedenen Darstellungen stammten, ermittelt, und, wie folgt gefunden:

1) $d_{22} = 0.8660$, $n_D = 1.4724$, $\alpha = -22^{\circ}\,20'$, $M = 44.01$.
2) $d_{22} = 0.8675$, $n_D = 1.4749$, $\alpha = -22^{\circ}\,5'$, $M = 44.13$.

Für $C_{10}H_{16}$ berechnet sich $M = 43.53$. Die gefundene Molekularrefraktion entspricht also ganz der nach meinen Beobachtungen [Annalen d. Ch. **347**, 318; **360**, 37] für einen Methenkohlenwasserstoff zu erwartenden.

Die Analyse beweist, daß reiner Kohlenwasserstoff vorlag:

0.1230 g gaben 0.3974 CO_2 und 0.1316 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{16}$	Gefunden
C — 88.16	88.12
H — 11.84	11.97.

Daß dieser Kohlenwasserstoff nun Links β-Pinen vorstellt, welches außerdem nur noch kleine Mengen von Fenchen enthält und daß der synthetische Kohlenwasserstoff jedenfalls das reinste β-Pinen ist, welches man zur Zeit überhaupt erhalten kann, geht aus folgendem Verhalten hervor:

1) Bei der Oxydation mit Permanganat unter Zusatz von

etwas Aetznatron erhält man aus dem Kohlenwasserstoff ein schwer lösliches Natriumsalz einer α-Oxysäure, welche folgende Eigenschaften aufweist:

Schmelzpunkt 126—127°, linksdrehend:

$S = 0.3752$, L (Aether) = 5,751, $d = 0,740$,
$t = 18°$, $p = 6.12\,\%$, $l = 1$ dm, $\alpha = -44'$
$[\alpha]_D = -16°\,11'$.

Beim Erwärmen mit Bleisuperoxyd wird die Säure zu Nopinon oxydiert. Schmelzpunkt des Semicarbazons 187—188°. Das Semicarbazon erwies sich, wie das des gewöhnlichen Nopinons als rechts drehend.

Die freie bei 126—127° schmelzende Säure erlitt mit Nopinsäure aus natürlichem Pinen gemischt keine Schmelzpunktsdepression. Es ist also aus dem synthetischen Kohlenwasserstoff Nopinsäure entstanden, welche in allen Stücken mit der bekannten Nopinsäure aus natürlichem β-Pinen identisch ist. [Vergl. Annalen **356**, 228.]

2) Neben Nopinsäure entstand aus dem synthetischen Kohlenwasserstoff ein in kaltem Wasser schwerlösliches Glycol vom Schmelzpunkt 75—77°.

0.1012 g gaben 0.2611 CO_2 und 0.0982 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O_2$	Gefunden
C — 70.53	70.37
H — 10.66	10.86.

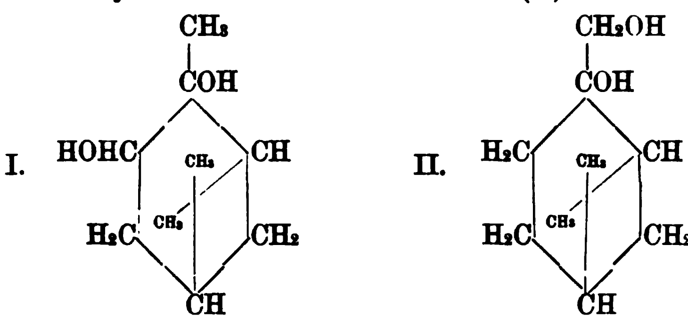
Nun wurde eine an β-Pinen reiche Fraction von entsprechendem Siedepunkt aus amerikanischem Terpentinöl in gleicher Weise oxydiert und dabei ein bei 75—77° schmelzendes Glycol (aber in geringerer Ausbeute als aus synthetischem β-Pinen) erhalten, welches sich mit dem oben beschriebenen als unzweifelhaft indentisch erwies.

0.1093 g gaben 0.2821 CO_2 und 0.1058 H_2O.

Berechnet für $C_{10}H_{18}O_2$	Gefunden
C — 70.53	70.39
H — 10.66	10.83.

Möglicher Weise hat G. Wagner schon Spuren dieser Verbindung in Händen gehabt. Denn er erhielt bei der Oxydation von Terpentinöl „eine ziemlich feste, krystallinische, äußerst hygroskopische Masse", die von den anhaftenden Mutterlaugen zu trennen nicht gelang. Nach langwieriger Reinigung wurden Krystalle vom Schmelzpunkt 76—78° erhalten, „welche wahrscheinlich das reine Glycol vorstellten. Ihre Menge war aber so gering,

daß sie zur Analyse nicht ausreichte". [Ber. 27, (1894) 2275.] Falls diese Verbindung mit der leicht aus β-Pinen erhältlichen identisch war, ist die Ansicht Wagners, der sie als Abkömmling des α-Pinens [Formel (I)] ansprach, über deren Constitution widerlegt. Dem Glycoll muß vielmehr die Formel (II)



zugeschrieben werden.

3) Der aus Nopinolessigsäure erhaltene Kohlenwasserstoff wurde unter den bekannten Bedingungen mit Eisessig-Schwefelsäure behandelt, um eventuell ein Hydratationsprodukt zu erhalten. Es zeigte sich aber, daß dabei der bei 162—163° siedende Kohlenwasserstoff lediglich zu einem höher (zwischen 175—180°) siedenden invertiert worden war, der sich als Terpinen erwies. Daneben waren kleine Mengen Isofenchylalkohol entstanden, was wohl auf einen geringen Fenchen-Gehalt im angewandten Präparat zurückgeführt werden muß.

Es mag hier gleich eingeschaltet werden, daß die oben erwähnte zweite bei der Wasserabspaltung aus Nopinolessigsäure entstehende, schwerer unter CO_2-Abgabe zerfallende Säure bei diesem Zerfall nicht β-Pinen, sondern Fenchen liefert und dem synthetischen β-Pinen daher sich leicht etwas Fenchen beimengen wird.

4) Das synthetische β-Pinen wurde teils in ätherischer, teils in Eisessig-Lösung mit trocknem Chlorwasserstoff gesättigt. In beiden Fällen entstand ein Gemenge von Dipentendichlorhydrat $C_{10}H_{16} . 2HCl$ und Bornylchlorid $C_{10}H_{17}Cl$, welches sich durch fraktionierte Destillation annähernd trennen ließ.

Das Bornylchlorid schmolz schon nach einmaligem Umkrystallisieren aus Aether bei 117—120° und war wie der Ausgangskohlenwasserstoff, linksdrehend.

$$S = 1.105, \quad L \text{ (Aether)} = 5.724, \quad d = 0.756,$$
$$t = 19^{\circ}, \quad p = 16{,}18\,\%, \quad l = 1 \text{ dm}, \quad \alpha = -2^{\circ}\,47'$$
$$[\alpha]_D = -22{,}75^{\circ}.$$

0.1208 g gaben 0.1075 AgCl.

Berechnet für $C_{10}H_{17}Cl$	Gefunden
Cl — 21.81	22.00 %.

Durch Chlorwasserstoffentziehung nach der früher von mir ausgearbeiteten Methode (Annalen **239**, 6) ließ sich das Bornylchlorid in Camphen überführen, das bei 158—160° siedete und beim Abkühlen auf 0° erstarrte. Das Camphen wurde seinerseits der Hydratation unterworfen und auf diese Weise inaktives Isoborneol vom Schmelzpunkt 210—212° erhalten. Das Isoborneol endlich gab bei der Oxydation Campher mit allen für diese Verbindung charakteristischen Eigenschaften. Die Identificierung wurde durch Ueberführung des Ketons in das Semicarbazon und Oxim vervollständigt.

Mit der Ueberführung von Nopinon $C_9H_{14}O$ in Campher $C_{10}H_{16}O$ liegt die erste **Synthese von Campher aus einer an Kohlenstoff ärmeren Verbindung überhaupt vor.**

Was das β-Pinen betrifft, so sind dessen Eigenschaften jetzt auch zum ersten Mal genauer feststellbar geworden, denn der synthetische Kohlenwasserstoff ist, wenn auch nicht absolut einheitlich, so doch reiner als irgend ein bis dahin bekanntes β-Pinen führendes Material. Besonders ist die Feststellung der Tatsache wichtig, daß β-Pinen bei den erwähnten Abwandlungen sich genau so verhält wie α-Pinen. Das läßt vermuten, daß β-Pinen sich wird in α-Pinen überführen lassen und namentlich in dieser Richtung werden die Versuche fortgesetzt, bei denen ich mich der bewährten Mitwirkung meines Assistenten Dr. Werner Lange zu erfreuen hatte.

II. Ueber die beiden Alkohole der Terpinenreihe.

(Mitbearbeitet von Fritz Meister.)

In einer früheren Arbeit habe ich nachgewiesen, daß dem im Cardamomenöl und im Majoranaöl natürlich vorkommenden, sowie dem durch Hydratation aus Sabinen erhältlichen aktiven Terpinenol unzweifelhaft die Formel:

CH_3
C
H_2C CH
H_2C CH_2
C.OH
$CH(CH_3)_2$

zukommt. Bei der Oxydation dieses Δ_1-Terpinenol (4) = Δ_1-p-Menthenol (4) kommt man zu einem bei 114—116° schmelzenden Trioxyterpan:

CH_3
C.OH
H_2C CHOH
H_2C CH_2
COH
$CH(CH_3)_2$

welches folgendes Verhalten zeigt: 1) beim Erwärmen mit Säuren liefert es (neben Cymol) Carvenon, 2) bei weiterer Oxydation mit Permanganat entsteht daraus eine Säure $C_{10}H_{18}O_6$ von sehr charakteristischen Verhalten. Die Säure trat in zwei Modifikationen auf a) einer optisch aktiven, bei 205—206° schmelzenden, b) einer optisch inaktiven, bei 188—189° schmelzenden. Beide Säuren lassen sich leicht in mit Wasserdämpfen flüchtige Bilactone $C_{10}H_{14}O_4$ überführen. Das der aktiven Säure a zugehörige schmilzt bei 63—64°, das der inaktiven Säure b zugehörige bei 72—73°. Die Konstitution dieser Verbindungen ist nun dahin aufgeklärt worden, daß die Oxydation des oben erwähnten Trioxyterpans nach folgenden Schema verläuft:

```
     CH3                     CH3                    CH3
      |                       |                      |
     C.OH                    C.OH                   C.OH
    /    \                  /    \                 /    \
H2C      CH.OH          H2C      CO            H2C      COOH
 |         |      →      |        |      →      |
H2C      CH2            H2C      CH2           H2C      COOH
    \    /                  \    /                 \    /
     C.OH                    C.OH                   C.OH
      |                       |                      |
    CH(CH3)2                CH(CH3)2               CH(CH3)2
```

Die beiden erst erwähnten Säuren sind also nichts anders als die aktive und die inaktive Form der $\alpha\alpha'$-Dioxy-α-Methyl-α'-isopropyl-Adipinsäure. Diese Säure vermag in das Bilacton

```
          CH3
           |
           C
         / | \
     H2C   CO  O
      |    |   |
      |    O   |
     H2C   |   CO
         \ | /
           C
           |
        CH(CH3)2
```

überzugehen, das in dem bei 72—73° schmelzenden Präparat in der inaktiven, in dem bei 63—64° schmelzenden in der aktiven Modifikation vorliegt.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Auffassung wurde auf dem Wege geführt, daß die als Oxydationsprodukt des Terpinenol (4) erhaltene Bioxysäure durch weitere Oxydation in ω-Dimethyl-Acetonylaceton übergeführt wurde, ein Vorgang, der sich nach dem folgenden Schema leicht erklärt:

```
       CH3                        CH3
        |                          |
       C—OH                        CO
      /    \                      /
  CH2       COOH              CH2
   |               + O2 =      |                + 2CO2 + 2H2O
  CH2       COOH              CH2
      \    /                      \
       C—OH                        CO
        |                          |
      CH(CH3)2                   CH(CH3)2
```

Auf der anderen Seite gelang es, aus ω-Dimethyl-Diacetonylaceton, welches einer anderen Quelle entstammte, durch das Cyanhydrat hindurch die αα′-Dioxy-α-Methyl-α′isopropyl-Adipinsäure in ihrer inaktiven bei 188—189° schmelzenden Form synthetisch aufzubauen:

```
     CH3                       CH3                   CH3
     |                         |                     |
     CO                        C—OH                  C—OH
    /                         /    \                /    \
CH2/                      CH2/      \CN         CH2/      \COOH
 |                         |                     |
 |        + 2CNH  =        |               →     |
 |                         |                     |
CH2\                      CH2\      /CN         CH2\      /COOH
    \                         \    /                \    /
     CO                        C—OH                  C—OH
     |                         |                     |
     CH(CH3)2                  CH(CH3)2              CH(CH3)2
```

Diese Säure erwies sich mit der aus dem Terpinenol entstandenen als völlig identisch.

Der zweite Alkohol der Terpinenreihe, das Terpinenol (1),

```
          CH3
          |
          C.OH
         /    \
    H2C /      \ CH2
       |        |
       |        |
    H2C \      // CH
         \    //
          C
          |
          CH(CH3)2
```

ist in einem Vorlauf des Handelsterpineols aufgefunden worden. Bei der Oxydation mit Permanganat liefert es ein bei 120—121° schmelzendes, schön krystallisierendes Glycerin, welches bei der Oxydation mit Permanganat gleichfalls αα′-Bioxy-α-Methyl-α′-isopropyladipinsäure liefert:

```
       CH3                 CH3                  CH3
        |                   |                    |
       C.OH                C.OH                 C—OH
      /    \              /    \               /    \
  H2C        CH       H2C        CH2       H2C        COOH
   |         |    →    |         |     →    |
  H2C        CH       H2C        CHOH      H2C        COOH
      \    //             \    /               \    /
        C                  COH                 C—OH
        |                   |                    |
     CH(CH3)2            CH(CH3)2             CH(CH3)2
```

Das 1. 3. 4 Trioxyterpan aus Terpinenol (1) verhält sich aber ganz anders gegen Säuren als das 1. 2. 4. Trioxyterpan aus Terpinenol (4). Während letzteres beim Erwärmen mit Salzsäure Carvenon liefert (s. oben), erhält man aus ersterem unter denselben Bedingungen neben Cymol ein Menthenon von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt 235—237°, d_{19} = 0.9375, n_D = 1.4875 bei 19°.

Das Semicarbazon dieses Ketons zeichnet sich durch große Schwerlöslichkeit aus und schmilzt bei 224—226°. Den Vorgang, der zur Bildung dieses Ketons führt, kann man sich durch folgende Formeln verdeutlichen:

```
       CH3                 CH3                  CH3
        |                   |                    |
       C.OH                 C                    C
      /    \              /   \\               /   \\
  H2C        CH2      H2C       CH         H2C       CH
   |         |    →    |        |      →    |        |
  H2C        CH.OH    H2C       C.OH       H2C       CO
      \    /              \   //               \   /
       C.OH                 C                   CH
        |                   |                    |
     CH(CH3)2            CH(CH3)2             CH(CH3)2
```

1. 3. 4 Trioxymenthon. Δ'-Menthenon.

Daß wirklich ein Menthenon vorliegt, wurde durch Ueberführung der Verbindung in i-Menthon durch Reduktion nachgewiesen. Für den Schmelzpunkt des Semicarbazons des inaktiven Menthons wurde 212° ermittelt. Auch das Oxim des i-Menthons schmilzt höher als das des bekannten aktiven.

Sehr auffallend ist der hohe Siedepunkt des Δ'-Menthenons. Zum Vergleich wurde das schon bekannte Δ^4-Menthenon

CH_3
C
H_2C CH_2
H_2C CO
C
$CH(CH_3)_2$

aus Menthen durch das Menthennitrosochlorid hierdurch hergestellt. Das Semicarbazon dieses Menthons schmilzt bei 142° und ist leicht löslich. Das aus dem reinen Semicarbazon regenerierte Keton zeigte folgende Eigenschaften. Siedepunkt konstant 213°, d = 0.918, n_D = 4720 bei 20,5°, M = 46.37.

Schließlich ist es auch gelungen, die beiden oben besprochenen Terpinenole auf synthetischem Wege aufzubauen.

Das Terpinenol (4) wurde, wie neulich schon mitgeteilt ist, in seiner aktiven Form aus Sabinenhydrat gewonnen, das aus Sabinaketon und Methylmagnesiumjodid erhalten war (Gött. Nachr. 1908, S. 12).

Terpinenol (1) habe ich gemeinsam mit Herrn Stud. R. Heyer auf analogem Wege aus Δ^3-Isopropylhexenon und Methylmagnesiumjodid erhalten:

O CH_3
C C—OH
H_2C CH_2 → H_2C CH_2
H_2C CH H_2C CH
C C
$CH(CH_3)_2$ $CH(CH_3)_2$

und durch Ueberführung in das bei 120—121° schmelzende 1. 3. 4 Trioxyterpan identificiert.

III. Ueber die Modifikationen des Terpinens.

1) Ueber β-Terpinen.

Die Fortsetzung der Untersuchung dieses Kohlenwasserstoffs, über dessen erste Darstellung ich schon früher berichtet habe [Nachr. 1907, S. 389], hat folgendes ergeben.

Der reine Kohlenwasserstoff siedet bei 173—174° und zeigt $d_{22} = 0.838$, $n_D = 1.4754$, M 45.72.

Er geht in Berührung mit Halogenwasserstoff glatt in Terpinendihydrohalogenide über und liefert mit Brom ein schwer lösliches bei 154—155° schmelzendes Tetrabromid, dem man die Formel

```
              CH2Br
                |
               CBr
             /     \
        H2C           CH2
          |             |
      BrHC             CH2
             \     /
              CHBr
                |
              CH(CH3)2
```

zuzuschreiben hat.

Der Kohlenwasserstoff absorbiert außerordentlich schnell Sauerstoff und geht dabei in ein schweres Oel über, das bei der Dampfdestillation (am besten nach Ansäuren mit Schwefelsäure) Cuminaldehyd liefert, der durch Ueberführung in die bei 115—116° schmelzende Cuminsäure identificirt wurde.

Diese Reaktion zeigt deutlich, daß man es im β-Terpinen mit dem Methenkohlenwasserstoff

```
               CH2
               ||
               C
             /   \
        H2C         CH2
          |           |
        HC           CH2
           \\     /
               C
               |
             CH(CH3)2
```

zu tun hat. Nachdem die Eigenschaften dieser auf synthetischem Wege erhaltenen Verbindung genau festgestellt sind, läßt sich nun aber auch schließen, daß sie in dem gewöhnlichen als „Terpinen" bekannten Produkt in erheblicher Menge nicht enthalten sein kann. (Näheres s. Annalen d. Chem. Abhandl. 96.)

2) Ueber α-Terpinen als Bestandteil des gewöhnlichen Terpinens.

Das Terpinennitrosit leitet sich, wie als ganz sicher festgestellt zu betrachten ist (Annalen d. Chem. **356**, 223), von dem α-Terpinen [= $\Delta^{1,3}$-Bihydrocymol]

```
            CH3
            |
            C
          /   \\
     H2C         CH
      |          |
     H2C         CH
          \   //
            C
            |
            CH(CH3)2
```

ab. Es war damit aber noch nicht bewiesen, ob diese Terpinenmodification auch als solche im Roh-Terpinen enthalten sei, oder ob bei der Entstehung des Nitrosits nicht eine Umlagerung eintreten könne.

Es wurde nun Terpinen nach verschiedenen Methoden dargestellt und zwar:

1) durch Chlorwasserstoffentziehung aus Terpinenbihydrochlorid.

2) Durch Inversion mit Schwefelsäure aus Pinen.

3) Durch Wasserentziehung aus Terpinenol (4) mit überschüssigem Magnesiumjodmethyl (Nebenreaktion bei der Synthese von Sabinenhydrat aus Sabinaketon nach Grignard). Es ist das eine Darstellung, bei welcher die eventuell verändernde Wirkung einer Säure vollständig ausgeschlossen ist.

Sämmtliche Präparate wurden mit Kaliumpermanganat der Oxydation unterworfen und es gelang in allen Fällen in reichlicher Menge die Entstehung der αα'-Dioxy-α-Methyl-α'Isopropyl-Adipinsäure nachzuweisen. Diese Säure kann sich aber einzig und allein aus α-Terpinen bilden:

```
      CH3                CH3                 CH3
       |                  |                   |
       C                  C.OH                C.OH
     /   \\             /    \              /    \
 H2C       CH      H2C        CHOH    H3C        COOH
  |         |   →   |          |    →  |
 H3C       CH      H2C        CHOH    H3C        COOH
     \   //             \    /              \    /
       C                  C.OH                COH
       |                  |                   |
      C3H7               C3H7                C3H7
```

Damit ist die Anwesenheit von α-Terpinen als integrierendem Bestandtheil im gewöhnlichen Terpinen definitiv bewiesen.

3) Ueber das Vorhandensein eines zweiten Kohlenwasserstoffes im Roh-Terpinen.

Alle auf dem erst erwähnten Wege hergestellten Terpinen-Proben lieferten bei der Oxydation neben $\alpha\alpha'$-Bioxy-$\alpha\alpha'$-Methyl-Isopropyladipinsäure in etwa gleicher Menge einen Erythrit, $C_{10}H_{16}(OH)_4$ welches ziemlich schwer löslich in Wasser ist und bei 236—237° schmilzt.

Dieser Erythrit leitet sich aber nicht von dem α-Terpinen ab, denn sonst müßte er bei weiterer Oxydation die mehrfach erwähnte substituierte Adipinsäure liefern, was nicht der Fall ist. β-Terpinen giebt auch ganz andere Oxydationsprodukte. Somit ist zu schließen, daß im gewöhnlichen Terpinen noch ein anderer Kohlenwasserstoff enthalten ist. Das könnte nur das γ-Terpinen = $\Delta^{1,4}$-Bihydrocymol sein, oder auch Terpinolen,

```
        CH3                 CH3
         |                   |
         C                   C
       /   \\              /   \\
   H2C       CH       H2C       CH
    |         |        |         |
   HC        CH2      H2C       CH2
       \\   /              \   /
         C                   C
         |                   ||
      CH(CH3)2            C(CH3)2
    γ-Terpinen          Terpinolen
```

denn die Entstehung noch anderer Kohlenwasserstoffe aus dem Terpinenbihydrochlorid oder aus den Terpinenol (4) auf dem angegebenen Wege ist in hohem Grade unwahrscheinlich.

Nun zeigte sich bei einem mit Terpinolen angestellten Oxydationsversuch, daß sich aus diesem Kohlenwasserstoffe der bei 237° schmelzende Erythrit nicht erhalten läßt. Somit bleibt nur die Annahme übrig, daß der Erythrit bildende Kohlenwasserstoff im $\Delta^{1,4}$-Bihydrocymol zu suchen ist.

Daraus würde dann weiter zu folgern sein, daß das „Terpinen" ein Gemenge der beiden Kohlenwasserstoffformen

CH_3 — C; H_2C, CH; H_2C, CH; C — $CH(CH_3)_2$

und

CH_3 — C; CH, CH_2; H_2C, CH; C — $CH(CH_3)_2$

also des $\Delta^{1,3}$- und $\Delta^{1,4}$-Bihydrocymols vorstellt, zwischen denen sich bei der Entstehung des Terpinens ein Gleichgewicht herzustellen scheint.

Bei der Durchführung dieser Versuche hat mich Herr Dr. F. Boedecker in bester Weise unterstützt.

Über einen Einfluss eines natürlich aktiven Körpers auf das an ihm reflektierte Licht.

Von

K. Försterling.

(Vorläufige Mitteilung.)

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 27. Juni 1908.

Da schon ältere Theorien einen Einfluß des aktiven Körpers auf das an ihm reflektierte Licht vermuten ließen, so liegen bereits einige Versuche, einen solchen nachzuweisen, vor. Ich erwähne z. B. den von Hr. K. Schmidt[1]), der glaubte, einige Eigentümlichkeiten des am Quarz reflektierten Lichtes auf diese Weise deuten zu können. W. Voigt[2]) hat aber bemerkt, daß dies nicht angängig ist, und die beobachteten Eigentümlichkeiten lediglich dem Einfluß von Oberflächenschichten zuzuschreiben sind. Ferner hat P. Drude[3]) am Zinnober Versuche in dieser Richtung angestellt, die in Frage stehende Erscheinung aber nicht nachweisen können. Von Hr. W. Voigt wurde mir nun die Aufgabe gestellt, die Theorie der Reflexion an natürlich aktiven Körpern zu entwickeln und besonders auf singuläre Fälle nahe der Grenze der totalen Reflexion zu achten.

Zu Grunde gelegt wurden die Gleichungen der Voigt'schen[4]) oder der neueren Drude'schen[5]) Theorie, die in der bei der Entwicklung der Formeln gemachten Annäherung übereinstimmen.

---

1) K. Schmidt, Annalen der Physik. 1886. 29. S. 451.
2) W. Voigt, Annalen der Physik. 1887, S. 190.
3) P. Drude, Göttinger Nachrichten. 1892, S. 406.
4) W. Voigt, Annalen der Physik. 1905. S. 645 u. 1899, S. 301.
5) P. Drude, Göttinger Nachrichten 1904. S. 1.

Diese Theorien ergeben (übereinstimmend mit älteren), daß ein charakteristischer Einfluß vorhanden ist derart, daß linear parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht bei der Reflexion in elliptisches verwandelt wird. Im allgemeinen aber ist die Komponente im reflektierten Licht, welche senkrecht auf der einfallenden steht, außerordentlich klein, sodaß ein experimenteller Nachweis sehr unwahrscheinlich erscheint. Am Grenzwinkel der totalen Reflexion dagegen wird die gesuchte Amplitude durchaus merklich, besonders wenn der Einfallswinkel sehr groß ist. Eine eingehendere Betrachtung ergibt nun folgendes:

Bei isotropen aktiven Körpern ist die gesuchte Amplitude im wesentlichen nur dann merklich, wenn der Einfallswinkel so gewählt ist, daß die eine der beiden im aktiven Körper sich fortpflanzenden zirkularen Wellen totale Reflexion erleidet, die andere nicht. Bei der Kleinheit der Differenz der Brechungsindices der beiden Wellen darf der Einfallswinkel nur sehr wenig variiert werden, ohne daß dies Verhältnis gestört wird und demgemäß die reflektierte Amplitude senkrecht zur einfallenden merklich verschwindet. Dasselbe gilt für die Reflexion an einem einachsigen aktiven Kristall, dessen Achse in der Grenzebene liegt, wenn sich die Achse zugleich in der Einfallsebene befindet. Dagegen können inaktive einaxige Kristalle in analoger Orientierung und isotrope inaktive Körper derartige Effekte nicht zeigen.

Für die Beobachtung handelt es sich also darum, monochromatisches Licht genau unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion einfallen zu lassen, und zu zeigen, daß durch Kreuzung der Nikols das Gesichtsfeld nicht dunkel gemacht werden kann, auch wenn der erste Nikol nur Licht durchläßt, das parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, (was bei meinen Experimenten stets der Fall war). Um ferner die Wirkung der Aktivität möglichst stark zu bekommen, muß man den Einfallswinkel sehr groß wählen. Man wird nun am einfachsten so verfahren, daß man den aktiven Körper mit einer Flüssigkeit umgibt, deren Dispersionskurve diejenige des aktiven Körpers im sichtbaren Spektrum überschneidet. Beobachtet man bei nahezu 89° Einfallswinkel, wie es bei meinen Experimenten stets geschehen ist, so wird der Grenzwinkel, d. h. die größte Helligkeit nahezu bei der Farbe zu suchen sein, bei der die Überschneidung stattfindet. Läßt man nun weißes Licht reflektieren, und zerlegt es dann durch ein Okularprisma, so wird bei gekreuzten Nikols nur an der einen, der Überschneidnng entsprechenden Stelle im Spektrum eine helle Linie sichtbar sein.

Zur experimentellen Prüfung der Theorie stand mir ein Fueß'sches Spektrometer zur Verfügung[1]).

Als aktives Medium wurde zunächst Natriumchlorat verwendet, um die Formeln für isotrope Körper zu prüfen. Der Kristall war im hiesigen Physikalischen Institut gezüchtet; aus ihm war von Steeg und Reuter in Homburg eine Platte aus mehreren zusammengesetzten Stücken hergestellt, die, um möglichste Planheit zu erreichen, zwischen zwei Steinsalzstäben gefaßt und mit diesen zusammen geschliffen waren. Die brauchbare Fläche war etwa 6,5 cm lang und 1 cm hoch. Als ein bei der Temperatur 20° C. geeignetes Medium, in dem die Reflexion stattfand, bot sich Anisol. Die Überschneidung fand dann im Rot statt; durch Zusatz von Xylol kann die Stelle der Überschneidung beliebig weit nach Blau getrieben werden. Nach der Theorie mußte nun die erwartete Amplitude in der Farbe merklich werden, die von der Überschneidung aus etwas weiter nach Blau zulag. In der Tat erschien an dieser Stelle, also in Gelbrot, bei gekreuzten Nikols ein heller Streifen im Spektrum, der bei Zusatz von Xylol richtig nach Blau wanderte. Leider wurde das Licht sowohl bei diesem als auch bei allen anderen Versuchen durch die Glaswände des Troges und durch die Flüssigkeit namentlich im Rot etwas depolarisiert; es war daher die Erscheinung am besten im Blau zu beobachten. Immerhin war sie auch im Rot so auffallend, daß an der Existenz der gesuchten Amplitude kein Zweifel sein konnte.

Als einachsiger Kristall wurde eine kreisförmige, dem Göttinger Institut gehörende Quarzplatte von 4½ cm Durchmesser, deren Achse in der Grenzebene lag, gewählt. Als Flüssigkeit wurde Äthylenbromid genommen; die Überschneidung lag im Blau. Wenn die Achse der Quarzplatte in die Einfallsebene fiel, war im Blau eine helle Linie sichtbar, ähnlich wie beim Natriumchlorat, aber entsprechend dem größeren Drehungsvermögen des Quarzes intensiver.

Die Quarzplatte war so befestigt, daß sie um eine Achse senkrecht zur Grenzebene drehbar war; beim Drehen verbreiterte sich zunächst die helle Linie im Spektrum, und teilte sich schließlich in zwei. Die eine Linie blieb hierbei merklich an der ursprünglichen Stelle stehen, während die andere beim Vergrößern des Winkels zwischen der Achse und der Schnittlinie der Einfallsebene und Grenzebene nach Violett wanderte. Für den Fall, daß die optische Axe aus der Einfallsebene abweicht, werden die Formeln

1) Beschrieben von S. Nakamura, Ann. d. Phys. (14) 20. 810. 1906.

der Theorie außerordentlich kompliziert; es scheint indessen, daß sie die beschriebene merkwürdige Erscheinung fordern.

Um mich zu überzeugen, daß die von der Theorie geforderten und vom Experiment gegebenen Einflüsse der Aktivität bei einem gewöhnlichen Kristall wirklich nicht vorhanden sind, habe ich Beobachtungen an einer Platte von brasilianischem Turmalin angestellt. Diese stammte von demselben großen Kristall, an dem W. Voigt die Elastizitätskonstanten bestimmt hatte. Sie hatte eine Fläche von $4 \times 2{,}2$ cm. Diese Platte wurde in ein Gemisch von Schwefelkohlenstoff mit Benzol getaucht und ebenso wie der Quarz befestigt. Hier zeigte sich, falls die optische Achse nicht in der Einfallsebene lag, und das Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert war, nur eine helle Linie, die aber verschwand, wenn die optische Axe in die Einfallsebene gebracht wurde. Das Verhalten weicht also von dem bei Quarz gefundenen ab. Die Beobachtungen können daher als im Einklang mit der Theorie bezeichnet werden.

Göttingen, Juni 1908.

Ueber die reduzierten Differentialgleichungen des schweren unsymmetrischen Kreisels.

Von

Paul Stäckel (Karlsruhe i. B.).

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 11. Juli 1908.

Als reduzierte Differentialgleichungen des schweren unsymmetrischen Kreisels habe ich (Math. Ann. 65, Heft 4) die von P. A. Schiff für die drei Hauptinvarianten

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (a) \; S = Ax_0 p + By_0 q + Cz_0 r \\ (b) \; T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \\ (c) \; U = \frac{1}{2}(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) \end{cases}$$

aufgestellten Differentialgleichungen bezeichnet, welche so lauten:

$$\text{(II)} \begin{cases} (a) & dS/dt = (B-C)x_0 qr + (C-A)y_0 rp + (A-B)z_0 pq, \\ (b) & (2s_0^2 U - S^2)\, dT/dt = [S(h-T) - ks_0^2]\, dS/dt + [2s_0^2 T - S(x_0 p + y_0 q + z_0 r)]\, dU/dt \\ (c) & (dU/dt)^2 = s_0^2(2U - k^2) - S^2 + 2kS(h-T) - 2U(h-T)^2. \end{cases}$$

Betrachtet man die Bewegungen, bei denen die Hauptinvariante U einen konstanten Wert hat, also die Länge des Impulsvektors erhalten bleibt, so tritt, wie P. A. Schiff 1903 entdeckt hat, der merkwürdige Umstand ein, daß vermöge der dann geltenden algebraischen Relation (II c) zwischen S und T die Differentialgleichung (II b) identisch erfüllt ist.

Es liegt nahe zu fragen, was sich ereignet, wenn man einer der anderen Hauptinvarianten S und T einen konstanten Wert beilegt.

Was die lebendige Kraft T betrifft, so gelingt es leicht zu zeigen, daß bei der Annahme $T =$ konst., sobald über die Massenverteilung, also über die Werte der Konstanten $A, B, C; x_0\, y_0\, z_0$, keine besonderen Voraussetzungen gemacht werden, keine der 3 Gleichungen (II) vermöge der beiden anderen Gleichungen identisch erfüllt ist; hieraus folgt, daß sich der schwere unsymmetrische Kreisel bei allgemeiner Massenverteilung nur dann mit konstanter kinetischer Energie bewegen kann, wenn er eine permanente Drehung ausführt. Dagegen ist es mir gelungen zu beweisen, daß bei konstantem Werte von S, abgesehen von einem sogleich anzugebenden Ausnahmefall, vermöge der Gleichung (II a) die Differentialgleichung (II b) identisch erfüllt ist. Der Ausnahmefall ist gerade der bekannte Hess'sche Fall, bei dem für die Massenverteilung die folgenden Gleichungen:

$$z_0 = 0,\ A(B-C)x_0^2 = b(C-A)y_0^2$$

gelten und wo S den konstanten Wert Null hat. Die betrachteten Bewegungen lassen sich übrigens geometrisch-mechanisch so charakterisieren, daß bei ihnen die Länge der Projektion des Impulsvektors auf den Schwerpunktsvektor erhalten bleibt oder mit anderen Worten, daß der Endpunkt des Impulsvektors sich in einer Ebene bewegt, die auf der Verbindungsgeraden des festen Punktes und des Schwerpunktes senkrecht steht.

Wenn S den konstanten Wert S_0 hat, so wird nach (II a):

$$0 = (B-C)x_0\, qr + (C-A)\, y_0\, rp + (A-B)\, z_0\, pq, \tag{1}$$

und es ist im Allgemeinen vermöge der Gleichungen (I) und (1) T eine Funktion von U. Dieser Schluß versagt dann und nur dann, wenn die Gleichung (1) eine Folge der Gleichung (I a) ist; das tritt aber beim schweren unsymmetrischen Kreisel nur für den Hessschen Fall ein, der als erledigt gelten und ausgeschlossen werden darf.

Ist also T eine Funktion von U, so ergibt sich die Ableitung von T nach U durch Differentiation der Gleichungen (I) und (1) und Elimination von dp, dq, dr, und man hat daher, wenn zur Abkürzung

$$(2)\quad \begin{cases} (C-A)\, y_0 r + (A-B) z_0\, q = P, \\ (A-B) z_0 p + (B-C)\, x_0 r = Q, \\ (B-C)\, x_0 q + (C-A) y_0\, p = R \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$(3)\quad dT/dU = \begin{vmatrix} Ap & Bq & Cr \\ Ax_0 & By_0 & Cz_0 \\ P & Q & R \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A^2p & B^2q & C^2r \\ Ax_0 & By_0 & Cz_0 \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Weiter werde gesetzt:

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha = +A^2(B-C)\,x_0 y_0 z_0, \\ \beta = +B^2(C-A)\,x_0 y_0 z_0, \\ \gamma = +C^2(A-B)\,x_0 y_0 z_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = -BCx_0[(BC+AC-2AB)\,y_0^2 + (2AC-BC-AB)\,z_0^2 - 2A(B-C)\,x_0^2], \\ \beta' = -CAy_0[(CA+BA-2BC)\,z_0^2 + (2BA-CA-BC)\,x_0^2 - 2B(C-A)\,y_0^2], \\ \gamma' = -ABz_0[(AB+CB-2CA)\,x_0^2 + (2CB-AB-CA)\,y_0^2 - 2C(A-B)\,z_0^2]. \end{cases}$$

Dann gilt die Identität:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ Ax_0 & By_0 & Cz_0 \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} \cdot [s_0^2(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) - (Ax_0p + By_0q + Cz_0r)^2]$$

$$- \begin{vmatrix} P & Q & R \\ Ax_0 & By_0 & Cz_0 \\ A^2p & B^2p & C^2r \end{vmatrix} \cdot [s_0^2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - (Ax_0p + By_0q + Cz_0r)(x_0p + y_0q + z_0r)]$$

$$= [(B-C)\,x_0qr + (C-A)\,y_0rp + (A-B)\,z_0pq]\,[\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 + \alpha' qr + \beta' rp + \gamma' pq],$$

wovon man sich durch Ausrechnen überzeugen wolle. Besteht also die Gleichung (1), so verschwindet die rechte Seite. Mithin ist der Wert von dT/dU, den die Gleichung (3) liefert, identisch gleich dem Quotienten:

$$\frac{s_0^2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - (Ax_0p + By_0q + Cz_0r)(x_0p + y_0q + z_0r)}{s_0^2(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2) - (Ax_0p + By_0q + Cz_0r)^2},$$

d. h. vermöge der Gleichungen (I) gleich dem Wert, den die Differentialgleichung (II b) für $S = S_0$ ergibt. Was zu beweisen war.

Die Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Funktion in Sinuswellen.

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung am 27. Juni 1908.

Eine empirisch gegebene periodische Funktion durch eine Summe von Sinusfunktionen anzunähern, geschieht zweckmäßig in der Weise, daß man die Periode in eine Anzahl gleicher Teile teilt und nun die Konstanten der Sinusfunktionen so bestimmt, daß die Summe in den Teilpunkten mit der gegebenen Function übereinstimmt. Für 12 Teile habe ich eine Anordnung der Rechnung gegeben[1]), die sich sehr schnell und bequem durchführen läßt, und habe ferner gezeigt, wie man auch den Fall von 24 Teilen durch eine doppelte Anwendung des Schemas für 12 Teile erledigen kann[2]). Es läßt sich die Sache indessen noch ein wenig einfacher und übersichtlicher in folgender Weise darstellen.

Wenn die $2n$ Konstanten $a_0, a_1, \ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ so bestimmt werden sollen, daß die Summe

$$a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots + a_{n-1} \cos(n-1)\varphi + a_n \cos n\varphi$$
$$+ b_1 \sin\varphi + b_2 \sin 2\varphi + \cdots + b_{n-1} \sin(n-1)\varphi$$

für

$$\varphi = 0,\ \frac{2\pi}{2n},\ 2\frac{2\pi}{2n},\ \ldots\ (2n-1)\frac{2\pi}{2n}$$

gegebene Werte $y_0, y_1, \ldots y_{2n-1}$ annimmt, so hat man bekanntlich die Summen

$$A_\alpha = y_0 + y_1 \cos\left(\alpha\frac{2\pi}{2n}\right) + y_2 \cos\left(2\alpha\frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots + y_{2n-1}\cos\left((2n-1)\alpha\frac{2\pi}{2n}\right)$$

1) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48, S. 443.

2) Ebenda Bd. 52, S. 117.

und

$$B_\alpha = \qquad y_1 \sin\left(\alpha \frac{2\pi}{2n}\right) + y_2 \sin\left(2\alpha \frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots + y_{2n-1} \sin\left((2n-1)\alpha \frac{2\pi}{2n}\right)$$

zu bilden. Für $\alpha = 0$ und $\alpha = n$ liefert der erste Ausdruck die Werte $2na_0$ und $2na_n$, während der zweite Ausdruck verschwindet. Für $\alpha = 1, 2, \ldots n-1$ liefert der erste Ausdruck die Werte na_1, $na_2, \ldots na_{n-1}$ der zweite die Werte $nb_1, nb_2, \ldots nb_{n-1}$.

Um die Werte A_α, B_α zu berechnen, kann man die Summe jedesmal in zwei Teile teilen, von denen der eine die Glieder mit $y_0, y_2, y_4, \ldots y_{2n-2}$ der andere die Glieder mit $y_1, y_3, \ldots y_{2n-1}$ enthält.

$$A_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha + \mathfrak{A}'_\alpha,$$

wo

$$\mathfrak{A}_\alpha = y_0 + y_2 \cos\left(\alpha \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + y_{2n-2} \cos\left((n-1)\alpha \frac{2\pi}{n}\right);$$

$$\mathfrak{A}'_\alpha = y_1 \cos\left(\alpha \frac{2\pi}{2n}\right) + y_3 \cos\left(3\alpha \frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots + y_{2n-1} \cos\left((2n-1)\alpha \frac{2\pi}{2n}\right);$$

$$B_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha,$$

wo

$$\mathfrak{B}_\alpha = y_2 \sin\left(\alpha \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + y_{2n-2} \sin\left((n-1)\alpha \frac{2\pi}{n}\right);$$

$$\mathfrak{B}'_\alpha = y_1 \sin\left(\alpha \frac{2\pi}{2n}\right) + y_3 \sin\left(3\alpha \frac{2\pi}{2n}\right) + \cdots + y_{2n-1} \sin\left((2n-1)\alpha \frac{2\pi}{2n}\right).$$

Ist n eine grade Zahl, so sind $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{B}_\alpha$ genau so gebildet wie A_α, B_α nur daß die Periode in n Teile statt in $2n$ Teile geteilt ist und dementsprechend nur n Ordinaten $y_0, y_2, \ldots y_{2n-2}$ vorkommen. $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\alpha$ brauchen nur für $\alpha = 0, 1, 2, \cdots \frac{n}{2}$ berechnet zu werden. Für $\alpha = \frac{n}{2} + \beta$ ist

$$\mathfrak{A}_{\frac{n}{2}+\beta} = \mathfrak{A}_{\frac{n}{2}-\beta}, \quad \mathfrak{B}_{\frac{n}{2}+\beta} = -\mathfrak{B}_{\frac{n}{2}-\beta}.$$

Aehnlich verhält es sich mit $\mathfrak{A}'_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$. Die komplexe Zahl $\mathfrak{A}'_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha i$ kann durch eine Summe von Exponentialgrößen ausgedrückt werden

$$\mathfrak{A}'_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha i = y_1 e^{\alpha \frac{2\pi}{2n} i} + y_3 e^{3\alpha \frac{2\pi}{2n} i} + \cdots + y_{2n-1} e^{(2n-1)\alpha \frac{2\pi}{2n} i}$$

oder

$$(\mathfrak{A}'_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha i)\, e^{-\alpha \frac{2\pi}{2n} i} = y_1 + y_3 e^{\alpha \frac{2\pi}{n} i} + \cdots + y_{2n-1} e^{(n-1)\alpha \frac{2\pi}{n} i}.$$

Setzen wir

$$(\mathfrak{A}'_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha i) e^{-\alpha \frac{2\pi}{2n} i} = \overline{\mathfrak{A}}_\alpha + \overline{\mathfrak{B}}_\alpha i,$$

so sind $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ und $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ genau so aus $y_1, y_3, \dots y_{2n-1}$ gebildet, wie $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{B}_\alpha$ aus $y_0, y_2, \dots y_{2n-2}$.

Man kann daher $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$ und $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ nach den Regeln für n Teile der Periode aus $y_1, y_3, \dots y_{2n-1}$ berechnen und kann dann aus $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ die Größen $\mathfrak{A}'_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$ finden. Wieder ist es nur nöthig $\mathfrak{A}'_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$ für $\alpha = 0, 1, 2, \cdots \frac{n}{2}$ zu ermitteln, für größere Werte von α hat man nur zu beachten, daß nach der Definition von $\mathfrak{A}'_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$

$$\mathfrak{A}'_{\frac{n}{2}+\beta} = -\mathfrak{A}'_{\frac{n}{2}-\beta}, \quad \mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}+\beta} = \mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}-\beta}$$

ist.

Um die Größen A_α, B_α zu finden schreibt man die Größen $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{A}'_\alpha$ und $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$ $\left(\alpha = 0, 1, \cdots \frac{n}{2}\right)$ in zwei Horizontalreihen untereinander und addirt und subtrahiert je zwei untereinanderstehende Größen

$$\begin{array}{rllllll}
 & \mathfrak{A}_0, & \mathfrak{A}_1, & \mathfrak{A}_2, & \dots & \mathfrak{A}_{\frac{n}{2}-1}, & \mathfrak{A}_{\frac{n}{2}} \\
 & \mathfrak{A}'_0, & \mathfrak{A}'_1, & \mathfrak{A}'_2, & \dots & \mathfrak{A}'_{\frac{n}{2}-1}, & \mathfrak{A}'_{\frac{n}{2}} \\
\hline
\text{Summe:} & A_0, & A_1, & A_2, & \dots & A_{\frac{n}{2}-1}, & A_{\frac{n}{2}} \\
\text{Differenz:} & A_n, & A_{n-1}, & A_{n-2}, & \dots & A_{\frac{n}{2}+1} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlllll}
 & \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_2, & \dots & \mathfrak{B}_{\frac{n}{2}-1}, & \mathfrak{B}_{\frac{n}{2}} \\
 & \mathfrak{B}'_1, & \mathfrak{B}'_2, & \dots & \mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}-1}, & \mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}} \\
\hline
\text{Summe:} & B_1, & B_2, & \dots & B_{\frac{n}{2}-1}, & B_{\frac{n}{2}} \\
\text{Differenz:} & -B_{n-1}, & -B_{n-2}, & \dots & -B_{\frac{n}{2}+1}. &
\end{array}$$

Bei den Differenzen sind die Glieder der zweiten Horizontalreihe von denen der ersten abgezogen.

Die Berechnung von $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ $\left(\alpha = 0, 1, 2, \cdots \frac{n}{2}\right)$ geschieht genau in derselben Form wie die von $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\alpha$, nur daß $y_1, y_3, \dots y_{2n-1}$ an die Stelle von $y_0, y_2, \dots y_{2n-2}$ treten, und wie die Summe

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{A}_0}{n} + 2\frac{\mathfrak{A}_1}{n}\cos\varphi + 2\frac{\mathfrak{A}_2}{n}\cos 2\varphi + \cdots + 2\frac{\mathfrak{A}_{\frac{n}{2}-1}}{n}\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi + \frac{\mathfrak{A}_{\frac{n}{2}}}{n}\cos\frac{n}{2}\varphi \\ &+ 2\frac{\mathfrak{B}_1}{n}\sin\varphi + 2\frac{\mathfrak{B}_2}{n}\sin 2\varphi + \cdots + 2\frac{\mathfrak{B}_{\frac{n}{2}-1}}{n}\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi \end{aligned}$$

für die Teilpunkte

$$\varphi = 0,\ \frac{2\pi}{n},\ 2\frac{2\pi}{2n},\ \ldots\ (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

die Werte $y_0, y_2, \ldots y_{2n-2}$ annimmt, so nimmt die Summe

$$\frac{\overline{\mathfrak{A}}_0}{n} + 2\frac{\overline{\mathfrak{A}}_1}{n}\cos\varphi' + 2\frac{\overline{\mathfrak{A}}_2}{n}\cos 2\varphi' + \cdots + 2\frac{\overline{\mathfrak{A}}_{\frac{n}{2}-1}}{n}\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi' + \frac{\overline{\mathfrak{A}}_{\frac{n}{2}}}{n}\cos\frac{n}{2}\varphi'$$

$$+ 2\frac{\overline{\mathfrak{B}}_1}{n}\sin\varphi' + 2\frac{\overline{\mathfrak{B}}_2}{n}\sin 2\varphi' + \cdots + 2\frac{\overline{\mathfrak{B}}_{\frac{n}{2}-1}}{n}\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi'$$

für

$$\varphi' = 0,\ \frac{2\pi}{n},\ 2\frac{2\pi}{n},\ \ldots\ (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

die Werte $y_1, y_3, \ldots y_{2n-1}$ an.

Der Uebergang von den Größen $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ zu den Größen $\mathfrak{A}'_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$ besagt nun nichts anderes, als daß wir in dieser Summe für die Variable φ', deren Nullpunkt bei der Ordinate y_1 liegt, die ursprüngliche Variable $\varphi = \varphi' + \frac{2\pi}{2n}$ einführen.

Denn es ist

$$\overline{\mathfrak{A}}_\alpha \cos\alpha\left(\varphi - \frac{2\pi}{2n}\right) + \overline{\mathfrak{B}}_\alpha \sin\alpha\left(\varphi - \frac{2\pi}{2n}\right)$$

$$= \left(\overline{\mathfrak{A}}_\alpha \cos\alpha\frac{2\pi}{2n} - \overline{\mathfrak{B}}_\alpha \sin\alpha\frac{2\pi}{2n}\right)\cos\alpha\varphi$$

$$+ \left(\overline{\mathfrak{A}}_\alpha \sin\alpha\frac{2\pi}{2n} + \overline{\mathfrak{B}}_\alpha \cos\alpha\frac{2\pi}{2n}\right)\sin\alpha\varphi,$$

d. i. gleich $\mathfrak{A}'_\alpha \cos\alpha\varphi + \mathfrak{B}'_\alpha \sin\alpha\varphi$.

Mit anderen Worten die Summe

$$\text{II.}\quad \begin{aligned} &\frac{\mathfrak{A}'_0}{n} + 2\frac{\mathfrak{A}'_1}{n}\cos\varphi + 2\frac{\mathfrak{A}'_2}{n}\cos 2\varphi + \cdots + 2\frac{\mathfrak{A}'_{\frac{n}{2}-1}}{n}\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi \\ &+ 2\frac{\mathfrak{B}'_1}{n}\sin\varphi + 2\frac{\mathfrak{B}'_2}{n}\sin 2\varphi + \cdots + 2\frac{\mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}-1}}{n}\sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi + \frac{\mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}}}{n}\sin\frac{n}{2}\varphi \end{aligned}$$

nimmt für

$$\varphi = \frac{2\pi}{2n},\ 3\frac{2\pi}{2n},\ 5\frac{2\pi}{2n},\ \ldots\ (2n-1)\frac{2\pi}{2n}$$

die Werte $y_1, y_3, y_5, \ldots y_{2n-1}$ an. Wenn die erste Summe I, die aus den Ordinaten $y_0, y_2, \ldots y_{2n-2}$ berechnet ist, auch die dazwischen liegenden Ordinaten $y_1, y_3, \ldots y_{2n-1}$ der gegebenen periodischen

Funktion genau darstellte, so müßten die Größen

$$\mathfrak{A}'_\alpha,\ \mathfrak{B}'_\alpha \qquad \left(\alpha = 0, 1, 2, \cdots \frac{n}{2} - 1\right)$$

mit den Größen $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\alpha$ übereinstimmen und $\mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}}$ müßte Null sein. Denn da $\cos\frac{n}{2}\varphi$ für diese Werte von φ verschwindet, so würden die Koeffizienten der Summe II grade den Bedingungen genügen, aus denen sie bestimmt werden, wenn man $\mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}} = 0$ setzt und die übrigen Koeffizienten den entsprechenden Koeffizienten von I gleich setzt. Wenn die Summe I die zwischenliegenden Ordinaten zwar nicht genau, aber doch nahezu darstellt, so werden die Koeffizienten von I und II nur wenig von einander abweichen. Ihre arithmetischen Mittel liefern für $\alpha < \frac{n}{2}$ die Koeffizienten der Summe die in den $2n$ Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{2n-1}$ mit der gegebenen periodischen Funktion übereinstimmt; für $\alpha > \frac{n}{2}$ werden die Koeffizienten durch ihre halben Differenzen bestimmt. Denn es ist

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{A}_0}{n} + \frac{\mathfrak{A}'_0}{n}\right) = \frac{A_0}{2n} = a_0, \quad \tfrac{1}{2}\left(2\frac{\mathfrak{A}_1}{n} + 2\frac{\mathfrak{A}'_1}{n}\right) = \frac{A_1}{n} = a_1,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(2\frac{\mathfrak{B}_1}{n} + 2\frac{\mathfrak{B}'_1}{n}\right) = \frac{B_1}{n} = b_1 \quad \text{u. s. w.}$$

aber

$$\frac{\mathfrak{A}_{\frac{n}{2}}}{n} = a_{\frac{n}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{B}'_{\frac{n}{2}}}{n} = b_{\frac{n}{2}},$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{A}_0}{n} - \frac{\mathfrak{A}'_0}{n}\right) = \frac{A_n}{2n} = a_n, \quad \tfrac{1}{2}\left(2\frac{\mathfrak{A}_1}{n} - 2\frac{\mathfrak{A}'_1}{n}\right) = \frac{A_{n-1}}{2n} = a_{n-1},$$

$$\tfrac{1}{2}\left(-2\frac{\mathfrak{B}_1}{n} + 2\frac{\mathfrak{B}'_1}{n}\right) = \frac{B_{n-1}}{n} = b_{n-1} \quad \text{u. s. w.}$$

Anstatt die Größen $\mathfrak{A}'_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$ durch Vermittlung der Größen $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ zu berechnen, die mit ihnen durch die Gleichungen

$$(\mathfrak{A}'_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha i)\, e^{-\alpha\frac{2\pi}{2n}i} = \overline{\mathfrak{A}}_\alpha + \overline{\mathfrak{B}}_\alpha i$$

zusammenhängen, kann man sich auch andrer Größen $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_\alpha$, $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_\alpha$ bedienen, die durch die Gleichungen

$$(\mathfrak{A}'_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha i)\, e^{-(2\beta-1)\alpha\frac{2\pi}{2n}i} = \overline{\overline{\mathfrak{A}}}_\alpha + \overline{\overline{\mathfrak{B}}}_\alpha i$$

definiert sind. Drücken wir nämlich wieder wie oben $\mathfrak{A}'_\alpha + \mathfrak{B}'_\alpha i$ durch $y_1, y_3, \dots y_{2n-1}$ aus, so ergiebt sich

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_\alpha + \overline{\overline{\mathfrak{B}}}_\alpha i = y_{2\beta-1} + y_{2\beta+1} e^{\alpha \frac{2\pi}{n}} + y_{2\beta+3} e^{2\alpha \frac{2\pi}{n}} + \cdots + y_{2\beta+2n-3} e^{(n-1)\alpha \frac{2\pi}{n}},$$

wobei unter $y_{\lambda+2n}$ dasselbe wie y_λ verstanden ist.

Die Größen $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_\alpha, \overline{\overline{\mathfrak{B}}}_\alpha$ werden dann genau so wie $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha, \overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ berechnet nur daß an Stelle der Reihe $y_1, y_3, y_5, \dots y_{2n-1}$ die Reihe $y_{2\beta-1}, y_{2\beta+1}, \dots y_{2\beta+2n-3}$ tritt, daß mit andern Worten die Periode an der Stelle $\varphi = (2\beta-1)\frac{2\pi}{2n}$ anfängt. Es liegt ein Vorteil darin, daß man über die Zahl β noch passend verfügen kann. Setzt man z. B. in dem Falle, wo $\frac{n}{4}$ eine ungerade Zahl ist, $2\beta - 1 = \frac{n}{4}$, so wird

$$e^{(2\beta-1)\alpha\frac{2\pi}{2n}i} = e^{\alpha\frac{\pi}{4}i}$$

und das durchläuft für $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Die Werte

$$1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1 \quad \text{u. s. w.}$$

sodaß die Faktoren, durch die $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_\alpha, \overline{\overline{\mathfrak{B}}}_\alpha$ in $\mathfrak{A}'_\alpha, \mathfrak{B}'_\alpha$ verwandelt werden, einfache Formen haben und immer wiederkehren.

Ein numerisches Beispiel möge zeigen, wie bequem z. B. für 24 Ordinaten sich die Rechnung durchführen läßt. Die gegebenen 24 Ordinaten seien

65.8, 24.4, − 17.6, − 27.7, − 35.2, − 29.4, − 18.6, + 1.9, + 14.0,
+ 17.1, + 28.8, − 31.2, − 67.9, − 39.0, + 8.8, + 21.2, + 32.2, + 30.0,
+ 18.4, − 1.0, − 16.4, − 20.5, − 30.2, + 21.0.

Wir ordnen sie in zwei Reihen zu je 12 und lassen die zweite Reihe bei der Phase $\frac{2\pi}{8} = 3\frac{2\pi}{24}$, d. h. bei der Ordinate y_3 anfangen. Die beiden Reihen werden gleich umgefaltet hingeschrieben und so behandelt, wie ich es auseinandergesetzt habe[1]).

Ich will die Rechnung für die zweite Reihe hinschreiben in der Form, wie sie sich mir herausgebildet hat. Man wird an der Hand der l. c. angegebenen Beschreibung keine Schwierigkeit haben die Bedeutung der Ziffern zu verstehn.

1) C. Runge, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48, S. 443. C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, S. 153.

−27.7	−29.4	+1.9	+17.1	−31.2	−39.0	+21.2
	+24.4	+21.0	−20.5	−1.0	+30.0	
−27.7	−5.0	+22.9	−3.4	−53.8	−19.1	+37.6
+21.2	−9.0	−32.2		−69.0	−30.2	
−6.5	−14.0	−9.3	−3.4	−122.8	−49.3	+37.6
−48.9	+4.0	+55.1		+15.2	+11.1	
	(+55.1)	(+9.3) (−14.0)		(−122.8)		
	+27.6	+4.6 −7.0		−61.4		
	+4.0			−49.3	15.2 11.1	
	−0.5			+6.6	−2.0 −1.5	
−6.5 −14.0	−48.9	−6.5 +3.4	−48.9	+37.6		−122.8
−9.3 −3.4			−55.1			−37.6
−15.8	−21.3	−1.9	−104.0	−23.8	+13.2	−160.4
−17.4	+3.5	−3.6		−42.7	+9.6	
−33.2	−17.8	−5.5	−104.0	−66.5	+22.8	−160.4
+1.6	−24.8	+1.7		+18.9	+3.6	

Die in den letzten beiden Reihen stehenden Zahlen sind die Werthe der oben mit $\overline{\mathfrak{A}}_0, \overline{\mathfrak{A}}_1, \ldots \overline{\mathfrak{A}}_6$; $\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2, \ldots \overline{\mathfrak{B}}_5$ bezeichneten Größen in der folgenden Anordnung

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c||c|c|c} \overline{\mathfrak{A}}_0 & \overline{\mathfrak{A}}_1 & \overline{\mathfrak{A}}_2 & \overline{\mathfrak{A}}_3 & \overline{\mathfrak{B}}_1 & \overline{\mathfrak{B}}_2 & \overline{\mathfrak{B}}_3 \\ \overline{\mathfrak{A}}_6 & \overline{\mathfrak{A}}_5 & \overline{\mathfrak{A}}_4 & & \overline{\mathfrak{B}}_5 & \overline{\mathfrak{B}}_4 & \end{array}\right|.$$

Die eingeklammerten Zahlen pflege ich erst hinzuschreiben, dann ihre Hälften darunter zu setzen und sie dann durchzustreichen. Die mit kleinen Typen gesetzten Zahlen bezeichnen Korrektionen, die an den darüberstehenden Zahlen angebracht werden. Statt sie nämlich mit $\sin 60^\circ = 0{,}8660$ zu multiplizieren, wird ihr Produkt mit $1 - \sin 60^\circ = 0{,}1340$ algebraisch abgezogen. Wenn man die Multiplikation mit dem Rechenschieber ausführt, so wird wegen des kleineren Wertes von 0,1340 das Resultat der Multiplikation mit $\sin 60^\circ$ auf etwa $\frac{1}{2000}$ genau.

Die ganze Rechnung nimmt nicht viel mehr Zeit in Anspruch, als es kostet, die Ziffern hinzuschreiben. Man kann hier nun gleich eine Probe anschließen. Es muß die Summe der Quadrate

der Ordinaten gleich

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}}_0^2}{2}+\overline{\mathfrak{A}}_1^2+\overline{\mathfrak{B}}_1^2+\overline{\mathfrak{A}}_2^2+\overline{\mathfrak{B}}_2^2+\cdots+\overline{\mathfrak{A}}_5^2+\overline{\mathfrak{B}}_5^2+\frac{\overline{\mathfrak{A}}_6^2}{2}\right)$$

sein. In unserm Falle ist die erste Summe gleich 7229 die zweite gleich $\frac{1}{6}\cdot 43377 = 7229$.

Jetzt sind die Größen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ zu berechnen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{A}}_0 \qquad\qquad &= \mathfrak{A}_0',\\
(\overline{\mathfrak{A}}_1+\overline{\mathfrak{B}}_1 i)\frac{1+i}{\sqrt{2}} &= \mathfrak{A}_1'+\mathfrak{B}_1' i,\\
(\overline{\mathfrak{A}}_2+\overline{\mathfrak{B}}_2 i)\, i \qquad &= \mathfrak{A}_2'+\mathfrak{B}_2' i,\\
(\overline{\mathfrak{A}}_3+\overline{\mathfrak{B}}_3 i)\frac{-1+i}{\sqrt{2}} &= \mathfrak{A}_3'+\mathfrak{B}_3' i,\\
(\overline{\mathfrak{A}}_4+\overline{\mathfrak{B}}_4 i)(-1) &= \mathfrak{A}_4'+\mathfrak{B}_4' i,\\
(\overline{\mathfrak{A}}_5+\overline{\mathfrak{B}}_5 i)\frac{-1-i}{\sqrt{2}} &= \mathfrak{A}_5'+\mathfrak{B}_5' i,\\
\overline{\mathfrak{A}}_6 \quad (-i) \qquad &= \qquad \mathfrak{B}_6' i.
\end{aligned}$$

Die Divisionen durch $\sqrt{2}$ lassen sich am besten als Multiplikationen mit 0,707 ausführen.

So erhalten wir für die Größen $\mathfrak{A}_\alpha'$, $\mathfrak{B}_\alpha'$ die Werte:

$\mathfrak{A}_0'$	$\mathfrak{A}_1'$	$\mathfrak{A}_2'$	$\mathfrak{A}_3'$	$\mathfrak{A}_4'$	$\mathfrak{A}_5'$
− 33.2,	34.4,	− 22.8,	+ 186.9,	− 1.7,	+ 30.9,

$\mathfrak{B}_1'$	$\mathfrak{B}_2'$	$\mathfrak{B}_3'$	$\mathfrak{B}_4'$	$\mathfrak{B}_5'$	$\mathfrak{B}_6'$
− 59.6,	− 5.5,	+ 39.9,	− 3.6,	+ 4.2,	− 1.6.

In derselben Weise wie hier die Größen $\overline{\mathfrak{A}}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ aus den Ordinaten $y_3, y_5, y_7, \ldots y_{23}, y_1$ werden die Größen $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\alpha$ aus den Ordinaten $y_0, y_2, y_4, \ldots y_{22}$ berechnet. Alsdann schreibt man die Werte von $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\alpha$ und die von $\mathfrak{A}_\alpha'$, $\mathfrak{B}_\alpha'$ in zwei Reihen untereinander

$\mathfrak{A}_0$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{A}_6$
− 17.9,	+ 10.8,	− 4.3,	+ 231.5,	+ 5.5,	+ 158.8,	+ 2.9
− 33.2,	+ 34.4,	− 22.8,	+ 186.9,	− 1.7,	+ 30.9,	

$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{B}_3$	$\mathfrak{B}_4$	$\mathfrak{B}_5$	
− 52.7,	− 6.9,	+ 69.6,	− 5.9,	+ 11.3	
− 59.6,	− 5.5,	+ 39.9,	− 3.6,	+ 4.2,	− 1.6.

Die Summen der untereinander stehenden Zahlen liefern die Werte

$A_0, A_1, A_2, \ldots A_6;\ B_1, B_2, \ldots B_6$. Die Differenzen (obere Größe minus untere Größe) liefern die Werte

$$A_{12}, A_{11}, \ldots A_7; \quad -B_{11}, -B_{10}, \cdots -B_7.$$

Würde die periodische Funktion schon durch die Glieder bis zur 5. Ordnung (einschließlich) mit ausreichender Genauigkeit dargestellt, so müßten A_α, B_α von $\alpha = 6$ an keine wesentlichen Beträge besitzen. Mit andern Worten dann würden die beiden Entwicklungen $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\alpha$ und $\mathfrak{A}'_\alpha$, $\mathfrak{B}'_\alpha$ bis $\alpha = 5$ im Wesentlichen übereinstimmen, und umgekehrt folgt aus ihrer beträchtlichen Abweichung, daß die Glieder von höherer als der 5. Ordnung noch wesentliche Beträge besitzen.

In unserm Falle erkennt man z. B. sofort, daß die Glieder 7. Ordnung noch einen beträchtlichen Wert haben. Denn es ist

$$a_7 \cos 7\varphi + b_7 \sin 7\varphi = \frac{A_7 \cos 7\varphi + B_7 \sin 7\varphi}{12}$$
$$= \frac{137.9 \cos 7\varphi - 7.1 \sin 7\varphi}{12}.$$

Die Amplitude dieser Welle beträgt also noch mehr als 11 Einheiten. Würde man Amplituden von etwa zwei Einheiten für unwesentlich betrachten, so würden in unserm Falle allein die Glieder 1., 3., 5., 7., 9. Ordnung in Betracht kommen.

Es hat keine Schwierigkeit die Zerlegung auch für 48 Ordinaten durchzuführen. Man braucht dazu nur zwei Zerlegungen für 24 Ordinaten die eine mit den Ordinaten von geradem Index, die andern mit denen von ungeradem Index. Alsdann ist die eine Zerlegung auf die Phase der andern zu reduzieren und mit ihr in der besprochenen Weise zusammenzusetzen.

Formeln für die Reflexion des Lichtes an einer dünnen Metallschicht.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Juli 1908.

1) Beobachtungen, die im hiesigen physikalischen Institute im Gange sind, haben mich zu dem Versuche veranlaßt, die Formeln für die Reflexion des Lichtes an einer dünnen Schicht eines auf einem andern Metalle niedergeschlagenen Metalles in eine gebrauchsfähige Form zu bringen. Diese Formeln sind bekanntlich außerordentlich kompliziert und im Allgemeinen zu Folgerungen kaum zu benutzen, selbst wenn man die zuerst von Drude eingeführte Annahme zuläßt, daß für beide Metalle 1 und 2 die Brechungsindices n_h und die Absorptionsindices $\varkappa_h$ solche Werte besitzen, daß Eins neben $n_h^2(1+\varkappa_h^2)$ vernachlässigt werden darf.

Ich habe nun gefunden, daß diese Formeln sich durch einen Kunstgriff außerordentlich vereinfachen lassen, sodaß sie für die Berechnung wenig unbequemer sind, als die für Reflexion an einem einfachen Metallspiegel gültigen; auf letztere Formeln gelangt man von den für eine Metallschicht geltenden auf die einfachste Weise, indem man die Schichtdicke unendlich werden läßt. Insbesondere werden die für die Anwendungen wohl wichtigsten Gesetze, welche den Haupteinfallswinkel Φ und das Hauptazimut Θ definieren, überraschend einfach. Da, wie ich weiß, mehrfach Versuche gemacht sind, die Formeln für Reflexion und Brechung an Metallschichten in handliche Form zu bringen, so teile ich die im obigen speziellen, aber besonders wichtigen Fall erhaltenen Resultate nachstehend mit.

2) Gleichviel, ob es sich um durchsichtige oder absorbierende isotrope Körper, ob um parallel oder normal zur Einfallsebene polarisierte Wellen handelt, gilt für die komplexe Amplitude, welche

an einer Platte reflektiert wird, die Formel

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_1^{+1} + \mathfrak{r}'\mathfrak{e}_1^{-1}}{\mathfrak{e}_1^{+1} + \mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'\mathfrak{e}_1^{-1}}. \tag{1}$$

Hierin bezeichnet $\mathfrak{E}$ die einfallende Amplitude, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ sind die komplexen Schwächungskoeffizienten bei der Reflexion an der ersten und an der zweiten Grenzfläche, $\mathfrak{e}_1$ ist der gleichfalls komplexe Schwächungskoeffizient des Durchganges durch die Platte. Die $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{e}_1$ enthalten die bezüglichen Phasen- und Intensitätsänderungen in sich.

Bedeuten

$$\mathfrak{n}_1 = n_1(1 - i\varkappa_1), \quad \mathfrak{n}_2 = n_2(1 - i\varkappa_2) \tag{2}$$

die komplexen Brechungsindices des zweiten und dritten Medium gegen das erste, durchsichtig angenommene, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ die komplexen Richtungskosinus der Wellennormalen in den drei Medien gegen das Einfallslot, und werden die senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisierten Schwingungen durch die Indices s und p unterschieden, so gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_s &= \frac{\mathfrak{n}_1\mathfrak{c} - \mathfrak{c}_1}{\mathfrak{n}_1\mathfrak{c} + \mathfrak{c}_1}, \quad \mathfrak{r}_s' = \frac{\mathfrak{n}_2\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{n}_1\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{n}_2\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{n}_1\mathfrak{c}_2}, \\ \mathfrak{r}_p &= \frac{\mathfrak{c} - \mathfrak{n}_1}{\mathfrak{c} + \mathfrak{n}_1}, \quad \mathfrak{r}_p' = \frac{\mathfrak{n}_1\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{n}_2\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{n}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{n}_2\mathfrak{c}_2}, \\ \mathfrak{e}_1 &= e^{\frac{2\pi i l \mathfrak{n}_1\mathfrak{c}_1}{\lambda}}, \end{aligned} \tag{3}$$

unter λ die Wellenlänge im ersten Medium, unter l die Dicke der Schicht verstanden.

Die Drude'sche Annahme, deren wir uns weiterhin bedienen wollen, kommt darauf hinaus, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ als von Eins wenig verschieden einzuführen. Nehmen wir dann noch $\mathfrak{c}$ als reell $= \gamma$, also die Welle im ersten Medium homogen an, so resultiert das für Weiteres maßgebende Wertsystem:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_s &= \frac{\mathfrak{n}_1\gamma - 1}{\mathfrak{n}_1\gamma + 1}, \quad \mathfrak{r}_s' = \frac{\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{n}_1}{\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_1}, \\ \mathfrak{r}_p &= \frac{\gamma - \mathfrak{n}_1}{\gamma + \mathfrak{n}_1}, \quad \mathfrak{r}_p' = \frac{\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2}{\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2}, \\ \mathfrak{e}_1 &= e^{\frac{2\pi i l \mathfrak{n}_1}{\lambda}} = e^{L}, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei L eine Abkürzung ist.

Für die weitere Behandlung der Grundformel (1) ist nun maßgebend, daß $\mathfrak{r}_p' = -\mathfrak{r}_s'$ von der Dicke der Schicht und von

dem Einfallswinkel, damit also von den Größen, die man bei den Beobachtungen zu variieren pflegt, **unabhängig** ist. Wir setzen demgemäß

$$(5) \qquad \mathfrak{r}'_p = -\mathfrak{r}'_s = \frac{\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2}{\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2} = e^{2K},$$

wobei K eine komplexe Konstante ist.

3) Hiernach wird aus (1)

$$(6) \qquad \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s \frac{\mathfrak{r}_s \mathfrak{e}^{+1} - \mathfrak{e}^{-1}}{\mathfrak{e}^{+1} - \mathfrak{r}_s \mathfrak{e}^{-1}}, \quad \mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p \frac{\mathfrak{r}_p \mathfrak{e}^{+1} + \mathfrak{e}^{-1}}{\mathfrak{e}^{+1} + \mathfrak{r}_p \mathfrak{e}^{-1}},$$

wobei nun in zum Teil neuen Bezeichnungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{e} &= e^{(L-K)} = e^{D}, \\ L - K &= (L_1 - K_1) + i(L_2 - K_2) = D_1 + iD_2. \end{aligned}$$

Nun ist unter Einführung verständlicher Abkürzungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\mathfrak{e}^{+1} + \mathfrak{e}^{-1}) &= \mathfrak{Cof}\, D_1 \cos D_2 + i\, \mathfrak{Sin}\, D_1 \sin D_2 = \mathfrak{C}'c' + i\mathfrak{S}'s', \\ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{e}^{+1} - \mathfrak{e}^{-1}) &= \mathfrak{Sin}\, D_1 \cos D_2 + i\, \mathfrak{Cof}\, D_1 \sin D_2 = \mathfrak{S}'c' + i\mathfrak{C}'s'. \end{aligned}$$

Hierdurch nehmen die Formeln (6) die Gestalt an

$$(9) \qquad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{E}_s} = \frac{A_s + iB_s}{C_s + iD_s}, \quad \frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{E}_p} = \frac{A_p + iB_p}{C_p + iD_p},$$

wobei

$$(10) \qquad \begin{aligned} \left.\begin{matrix} A_s \\ C_s \end{matrix}\right\} &= n_1 \gamma (\mathfrak{S}'c' + \varkappa_1 \mathfrak{C}'s') \mp \mathfrak{C}'c', \\ \left.\begin{matrix} B_s \\ D_s \end{matrix}\right\} &= n_1 \gamma (\mathfrak{C}'s' - \varkappa_1 \mathfrak{S}'c') \mp \mathfrak{S}'s', \end{aligned}$$

$$(11) \qquad \begin{aligned} \left.\begin{matrix} A_p \\ C_p \end{matrix}\right\} &= \gamma \mathfrak{C}'c' \mp n_1 (\mathfrak{S}'c' + \varkappa_1 \mathfrak{C}'s'), \\ \left.\begin{matrix} B_p \\ D_p \end{matrix}\right\} &= \gamma \mathfrak{S}'s' \mp n_1 (\mathfrak{C}'s' - \varkappa_1 \mathfrak{S}'c'). \end{aligned}$$

Setzt man dann

$$(12) \qquad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{E}_s} = \operatorname{tg} \vartheta_s e^{i\delta_s}, \quad \frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{E}_p} = \operatorname{tg} \vartheta_p e^{i\delta_p},$$

so ergibt sich für beide Wellen

$$(13) \qquad \operatorname{tg}^2 \vartheta = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{BC - AD}{AC + BD};$$

kürzt man noch ab

$$(14) \quad \mathfrak{Cof}\, 2D_1 = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Sin}\, 2D_1 = \mathfrak{S}, \quad \cos 2D_2 = c, \quad \sin 2D_2 = s,$$

so erhält man nach einigen Reduktionen:

$$(15)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \vartheta_s &= \frac{n_1^2(1+\varkappa_1^2)\gamma^2(\mathfrak{C}-c) - 2n_1\gamma(\mathfrak{S}+\varkappa_1 s) + (\mathfrak{C}+c)}{n_1^2(1+\varkappa_1^2)\gamma^2(\mathfrak{C}-c) + 2n_1\gamma(\mathfrak{S}+\varkappa_1 s) + (\mathfrak{C}+c)}, \\ \operatorname{tg} \delta_s &= \frac{2n_1\gamma(s-\varkappa_1\mathfrak{S})}{n_1^2(1+\varkappa_1^2)\gamma^2(\mathfrak{C}-c) - (\mathfrak{C}+c)}, \end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \vartheta_p &= \frac{n_1^2(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}-c) - 2n_1\gamma(\mathfrak{S}+\varkappa_1 s) + \gamma^2(\mathfrak{C}+c)}{n_1^2(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}-c) + 2n_1\gamma(\mathfrak{S}+\varkappa_1 s) + \gamma^2(\mathfrak{C}+c)}, \\ \operatorname{tg} \delta_p &= \frac{2n_1\gamma(s-\varkappa_1\mathfrak{S})}{n_1^2(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}-c) - \gamma^2(\mathfrak{C}+c)}. \end{aligned}$$

Diese Formeln sind wenig komplizierter, als die für einfache Reflexion an einem Metallspiegel geltenden. Letztere gehen, wie schon bemerkt, daraus hervor, wenn man die Dicke l der Schicht und somit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ gleich unendlich setzt.

Bei normalem Einfall sind die Formeln (15) und (16) streng gültig, weil hier die Drude'sche Annäherung keine Vernachlässigung bedingt.

$\operatorname{tg}^2 \vartheta_s$ und $\operatorname{tg}^2 \vartheta_p$ bestimmen das Verhältnis der reflektierten Intensitäten zu den einfallenden für die senkrecht und die normal zur Einfallsebene polarisierten Komponenten. δ_s und δ_p sind die Beschleunigungen der reflektierten Komponenten gegen die auf die erste Grenzfläche einfallenden.

Das Auftreten der trigonometrischen Funktionen c und s in diesen Ausdrücken weist auf eine Periodizität in dem Verhalten der ϑ und δ bezüglich der Schichtdicke l hin. Ob ein solches merklich wird, und in welchem Umfange, hängt von dem Verlauf der hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{S}$ ab, die bei starker Absorption mit wachsendem l sehr schnell zunehmen.

4) Fast noch wichtiger, als die Ausdrücke für $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{E}_p$, ist der für $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{R}_p$, wobei $\mathfrak{E}_s/\mathfrak{E}_p$ als reell, das einfallende Licht, also als lineär polarisiert gelten mag. Wir erhalten unmittelbar aus (1)

$$(17)\quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\mathfrak{E}_s}{\mathfrak{E}_p} \frac{e_1^{+2}\mathfrak{r}_s + e_1^{-2}\mathfrak{r}_p\mathfrak{r}_s'\mathfrak{r}_p' + (\mathfrak{r}_s' + \mathfrak{r}_s\mathfrak{r}_p\mathfrak{r}_p')}{e_1^{+2}\mathfrak{r}_p + e_1^{-2}\mathfrak{r}_s\mathfrak{r}_s'\mathfrak{r}_p' + (\mathfrak{r}_p' + \mathfrak{r}_s\mathfrak{r}_p\mathfrak{r}_s')}.$$

Setzt man hier wieder

$$\mathfrak{r}_p' = -\mathfrak{r}_s' = e^{2K} \quad \text{und} \quad e^{2(L-K)} = e^2,$$

so folgt

$$(18)\quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\mathfrak{E}_s}{\mathfrak{E}_p} \frac{e^{+2}\mathfrak{r}_s - e^{-2}\mathfrak{r}_p - (1-\mathfrak{r}_s\mathfrak{r}_p)}{e^{+2}\mathfrak{r}_p - e^{-2}\mathfrak{r}_s + (1-\mathfrak{r}_s\mathfrak{r}_p)}.$$

Benutzt man die früheren Bezeichnungen

$$(19)\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(e^{+s}+e^{-s}) &= \mathfrak{Cof}\,2D_1\cos 2D_2 + i\,\mathfrak{Sin}\,2D_1\sin 2D_2 = \mathfrak{C}c+i\mathfrak{S}s,\\ \tfrac{1}{2}(e^{+s}-e^{-s}) &= \mathfrak{Sin}\,2D_1\cos 2D_2 + i\,\mathfrak{Cof}\,2D_1\sin 2D_2 = \mathfrak{S}c+i\mathfrak{C}s, \end{aligned}$$

so erhält man nach einigen Reduktionen:

$$(20)\qquad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\mathfrak{E}_s}{\mathfrak{E}_p}\,\frac{A+iB}{C+iD},$$

wobei

$$(21)\quad \begin{aligned} \left.\begin{matrix}A\\C\end{matrix}\right\} &= \alpha^2 n_1(\mathfrak{S}c+\varkappa_1\mathfrak{C}s) \mp \gamma(N\mathfrak{C}c+P\mathfrak{S}s-M),\\ \left.\begin{matrix}B\\D\end{matrix}\right\} &= \alpha^2 n_1(\mathfrak{C}s-\varkappa\mathfrak{S}c) \mp \gamma(N\mathfrak{S}s-P\mathfrak{C}c+P) \end{aligned}$$

und

$$(22)\quad N = n_1^2(1-\varkappa_1^2)-1,\quad M = n_1^2(1-\varkappa_1^2)+1,\quad P = 2n_1^2\varkappa_1.$$

Setzt man nunmehr

$$(23)\qquad \frac{\mathfrak{R}_s/\mathfrak{E}_s}{\mathfrak{R}_p/\mathfrak{E}_p} = \operatorname{tg}\vartheta\, e^{i\delta},$$

so ergibt sich bei Vernachlässigung von Eins neben $n_1^2(1+\varkappa_1^2)$

$$(24)\quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\alpha^2\gamma n_1^3(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}-c)(\mathfrak{S}\varkappa_1-s)}{\alpha^4 n_1^2(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}^2-c^2)-\gamma^2[n_1^4(1+\varkappa_1^2)^2(\mathfrak{C}-c)^2-4n_1^2\varkappa_1\mathfrak{S}s]}.$$

Der Haupteinfallswinkel ist dadurch definiert, daß der Nenner hiervon verschwindet. Dies gibt die Bedingung

$$(25)\qquad \frac{\bar{\alpha}^4}{\bar{\gamma}^2} = \operatorname{tg}^2\Phi\sin^2\Phi = \frac{n_1^4(1+\varkappa_1^2)^2(\mathfrak{C}-c)^2-4n_1^2\varkappa_1\mathfrak{S}s}{n_1^2(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}^2-c^2)}.$$

In der Regel wird die Annäherung genügen, bei der das letzte Glied des Zählers vernachlässigt wird. Hier folgt dann überaus einfach

$$(26)\qquad \frac{\bar{\alpha}^4}{\bar{\gamma}^2} = \operatorname{tg}^2\Phi\sin^2\Phi = n_1^2(1+\varkappa_1^2)\frac{\mathfrak{C}-c}{\mathfrak{C}+c}.$$

Wird die Schicht unendlich dick, ist also $\mathfrak{C}=\infty$ zu setzen, so ergibt sich die bekannte Beziehung $\bar{\alpha}^4/\bar{\gamma}^2 = n_1^2(1+\varkappa_1^2)$.

Ferner erhält man

$$(27)\quad \cos 2\vartheta = \frac{2\alpha^2\gamma n_1^3(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}-c)(\mathfrak{S}+\varkappa_1 s)}{\alpha^4 n_1^2(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}^2-c^2)+\gamma^2[n_1^4(1+\varkappa_1^2)^2(\mathfrak{C}-c)^2-4n_1^2\varkappa_1\mathfrak{S}s]}.$$

Im Falle des Haupteinfallswinkels sind die beiden Glieder des Nenners nach (24) einander gleich; hier wird sonach

$$(28)\qquad \cos 2\Theta = \frac{\bar{\gamma} n_1 (\mathfrak{S} + \varkappa_1 s)}{\bar{\alpha}^2 (\mathfrak{C} + c)},$$

und bei Benutzung von (26)

$$(29)\qquad \cos 2\Theta = \frac{\mathfrak{S} + \varkappa_1 s}{\sqrt{(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}^2 - c^2)}}.$$

Für eine unendlich dicke Schicht folgt wegen $\mathfrak{S} = \mathfrak{C} = \infty$ hieraus $\cos 2\Theta = 1/\sqrt{1+\varkappa_1^2}$ d. h. $\operatorname{tg} 2\Theta = \varkappa_1$, was die in diesem Falle geltende bekannte Beziehung ist.

Es mag schließlich noch an die Bedeutung der $\mathfrak{C}, \mathfrak{S}, c, s$ erinnert werden, die in den sämtlichen Endformeln auftreten.

Nach (7) war

$$e = e^{L-K} = e^{D_1 + iD_2}$$

und ist nach (4) und (5)

$$2L = 2(L_1 + iL_2) = \frac{4\pi i l n_1}{\lambda}(1 - i\varkappa_1),$$

$$e^{2K} = e^{2(K_1 + iK_2)} = \frac{n_1(1-i\varkappa_1) - n_2(1-i\varkappa_2)}{n_1(1-i\varkappa_1) + n_2(1-i\varkappa_2)}.$$

Dies ergibt

$$(30)\qquad 2L_1 = \frac{4\pi l n_1 \varkappa_1}{\lambda}, \quad 2L_2 = \frac{4\pi l n_1}{\lambda},$$

$$(31)\qquad \begin{aligned} e^{4K_1} &= \frac{(n_1 - n_2)^2 + (n_1\varkappa_1 - n_2\varkappa_2)^2}{(n_1 + n_2)^2 + (n_1\varkappa_1 + n_2\varkappa_2)^2}, \\ \operatorname{tg} 2K_2 &= \frac{2n_1 n_2(\varkappa_2 - \varkappa_1)}{n_1^2(1+\varkappa_1^2) - n_2^2(1+\varkappa_2^2)}. \end{aligned}$$

Hiermit sind die Definitionen zu verknüpfen

$$(32)\qquad \begin{aligned} &D_1 = L_1 - K_1, \quad D_2 = L_2 - K_2, \\ &\mathfrak{Cof}\, 2D_1 = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Sin}\, 2D_1 = \mathfrak{S}, \quad \cos 2D_2 = c, \quad \sin 2D_2 = s, \end{aligned}$$

um alles zusammenzustellen, was zur Benutzung der Formeln erforderlich ist. —

5) Im Vorstehenden sind die erhaltenen Formeln für die ϑ, δ, Θ, Φ dadurch verifiziert, daß sie auf den Wert $l = \infty$, d. h. $\mathfrak{C} = \mathfrak{S} = \infty$, angewendet wurden; hierbei entsteht der Fall der einfachen Reflexion an dem ersten Metall. Der Uebergang zu dem Wert $l = 0$ müßte auf den Fall der einfachen Reflexion an dem zweiten Metall führen. Es ist von Interesse, zu erkennen, wie diese Umwandlung der Formeln sich vollzieht; der äußere Habitus der Formeln läßt es auf den ersten Blick nicht wahrscheinlich erscheinen, daß hierbei das richtige Resultat entsteht.

Wir beschränken uns darauf, den Uebergang zu $l = 0$ bei den beiden einfachsten Formeln (26) und (29) zu verfolgen. Die übrigen gestatten analoge Behandlung.

Für $l = 0$ ist $L = 0$, also nach (7) und (14)

$$\frac{\mathfrak{C} - c}{\mathfrak{C} + c} = \frac{\left(e^{2K_1} + e^{-2K_1}\right) - \left(e^{2iK_2} + e^{-2iK_2}\right)}{\left(e^{2K_1} + e^{-2K_1}\right) + \left(e^{2iK_2} + e^{-2iK_2}\right)},$$

wofür sich schreiben läßt, falls

$$K = K_1 + iK_2, \quad K' = K_1 - iK_2, \tag{33}$$

$$\frac{\mathfrak{C} - c}{\mathfrak{C} + c} = \frac{\left(e^{2K} - 1\right)\left(e^{2K'} - 1\right)}{\left(e^{2K} + 1\right)\left(e^{2K'} + 1\right)}.$$

Dabei ist nach (5)

$$\frac{\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2}{\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2} = e^{2K}, \quad \frac{\mathfrak{n}_1' - \mathfrak{n}_2'}{\mathfrak{n}_1' + \mathfrak{n}_2'} = e^{2K'}, \tag{34}$$

falls $\mathfrak{n}_h' = n_h(1 + i\varkappa_h)$.

Nunmehr ergibt sich leicht

$$\frac{\mathfrak{C} - c}{\mathfrak{C} + c} = \frac{\mathfrak{n}_2 \mathfrak{n}_2'}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_1'} = \frac{n_2^2(1 + \varkappa_2^2)}{n_1^2(1 + \varkappa_1^2)}, \tag{35}$$

woraus gemäß (26) folgt für $l = 0$

$$\operatorname{tg}^2 \Phi \sin^2 \Phi = n_2^2(1 + \varkappa_2^2),$$

wie auch gelten muß.

Um die Formel (29) auf den Fall $l = 0$ anzuwenden, schreiben wir sie

$$\cos 2\Theta = \frac{\mathfrak{S} + \varkappa_1 s}{\mathfrak{C} + c} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{C} + c}{\mathfrak{C} - c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varkappa_1^2}},$$

wobei $\sqrt{(\mathfrak{C} + c)/(\mathfrak{C} - c)}$ nach (35) bereits bekannt ist.

Weiter gilt nach (7) und (14) unter Benutzung früherer Abkürzungen

$$\frac{\mathfrak{S} + \varkappa_1 s}{\mathfrak{C} + c} = \frac{i\varkappa_1\left(e^{2iK_2} - e^{-2iK_2}\right) - \left(e^{2K_1} - e^{-2K_1}\right)}{e^{2K_1} + e^{-2K_1} + e^{2iK_2} + e^{-2iK_2}}$$

$$= \frac{(1 - i\varkappa_1)\left(1 - e^{2K}\right)\left(1 + e^{2K'}\right) + (1 + i\varkappa_1)\left(1 - e^{2K'}\right)\left(1 + e^{2K}\right)}{2\left(1 + e^{2K}\right)\left(1 + e^{2K'}\right)},$$

d. h.,

$$\frac{\mathfrak{S} + \varkappa_1 s}{\mathfrak{C} + c} = (1 - i\varkappa_1)\frac{\mathfrak{n}_2}{2\mathfrak{n}_1} + (1 + i\varkappa_1)\frac{\mathfrak{n}_2'}{2\mathfrak{n}_1'} = \frac{\mathfrak{n}_2 + \mathfrak{n}_2'}{2n_1} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{36}$$

Hiernach ergibt sich für $l = 0$ aus (29)

$$\cos 2\Theta = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sqrt{\frac{n_1^2(1+\varkappa_1^2)}{n_2^2(1+\varkappa_2^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa_2^2}},$$

wie dies stattfinden muß.

6) Die Formeln (26) und (29) gestatten auch relativ leicht die Bestimmung derjenigen Schichtdicken, für welche Φ und Θ Extremwerte annehmen. Durch Differentiation nach l liefert (26)

$$2\,\mathrm{tg}^2\Phi(1+\cos^2\Phi)\frac{d\Phi}{dl} = \frac{4\pi n_1^2}{\lambda}(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{S}c\varkappa_1 + \mathfrak{C}s).$$

Dies ergibt, daß $d\Phi/dl$ nur Null wird, falls

$$\mathfrak{S}c\varkappa_1 + \mathfrak{C}s = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathrm{tg}\,2D_2 + \varkappa_1\,\mathfrak{Tg}\,2D_1 = 0. \tag{37}$$

Nach dem Verlauf der Kurven für tg und $\mathfrak{Tg}$ hat diese transzendente Gleichung unendlich viele Wurzeln für l, die mit wachsendem l allmählich aequidistant werden. Der Unterschied der maximalen und der minimalen Werte von $\mathrm{tg}^2\Phi\sin\Phi$ nimmt aber mit wachsendem l schnell ab.

Die Differentiation von (29) ergibt

$$-2\sin 2\Theta\frac{d\Theta}{dl} = \frac{4\pi n_1}{\lambda\sqrt{(1+\varkappa_1^2)(\mathfrak{C}^2-c^2)^3}}[\varkappa_1(\mathfrak{C}-c)(1+c\mathfrak{C}) - \mathfrak{S}s(c+\varkappa_1^2\mathfrak{C})].$$

Es kann also $d\Theta/dl$ nur dann gleich Null werden, wenn

$$\frac{\varkappa_1(\mathfrak{C}-c)}{\varkappa_1^2\mathfrak{C}+c} = \frac{\mathfrak{S}s}{1+c\mathfrak{C}}. \tag{38}$$

Hierin ist, wenn wir zunächst $\varkappa_1 > 1$ annehmen, bei wechselndem l die linke Seite jederzeit positiv und endlich; die rechte Seite oscilliert zwischen $+\infty$ und $-\infty$. Die Kurven, welche die beiden Seiten als Funktionen von l wiedergeben, haben demgemäß unendlich viele Schnittpunkte.

Mit wachsendem l nähert sich die Kurve für die linke Seite einer Geraden im Abstand $1/\varkappa_1$ von der Abszissenaxe, diejenige für die rechte Seite aber der Kurve für $s/c = \mathrm{tg}\,2D_2$. Die Wurzeln der Gleichung werden dabei je mehr und mehr aequidistant.

Ist $\varkappa_1 < 1$, so kann auch der Ausdruck auf der linken Seite $\pm\infty$ erreichen. Die Anordnung der ersten Wurzeln der Gleichung (38) kann in diesem Falle sehr unregelmäßig sein. Die Spannung zwischen maximalen und minimalen Werten von Θ nimmt in jedem Falle mit wachsendem l ab.

Göttingen, 18. Juli 1908.



ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

Mathematisch-physikalische Klasse. Neue Folge.

I. Bd. No. 1. **Koenen, A. v.,** *Ueber Fossilien der Unteren Kreide am Ufer des Mungo in Kamerun.* Mit 4 Tafeln. 4. (48 S.) 1897. 5 M.
Nachtrag dazu. 4. (S. 49—65 mit Tafeln V—VII.) 1898. 3 M.

I. Bd. No. 2. **Brendel, Martin,** *Theorie der kleinen Planeten.* Erster Teil. 4. (171 S.) 1898. 16 M.

I. Bd. No. 3. **Schur, W.,** *Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne aus heliometrischen Messungen von Sehnenlängen ausgeführt auf der Sternwarte zu Göttingen während der partiellen Sonnenfinsternisse von 1890 Juni 61/17 (Beobachter: Schur, Ambronn u. Hayn) und von 1891 Juni 6 (Beobachter: Schur).* Mit 3 Plänen der Sternwarte nebst Verzeichniss der grösseren Instrumente. 4. (26 S.) 1898. 3 M.

I. Bd. No. 4. **Schur, W.,** *Vermessung der beiden Sternhaufen h und χ Persei mit dem sechszölligen Heliometer der Sternwarte in Göttingen verbunden mit einer Uebersicht aller bis zum Jahre 1900 ausgeführten Instrumentaluntersuchungen.* Mit einer Sternkarte. 4. (88 S.) 1900. 9 M.

II. Bd. No. 1. **Wiechert, E.,** *Theorie der automatischen Seismographen.* 4. (128 S.) 1903. 8 M.

II. Bd. No. 2. **Kramer, Julius,** *Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Hecuba Typus.* 4. (153 S.) 1902. 15 M.

II. Bd. No. 3. **Furtwängler, Ph.,** *Ueber das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.* 4. 82 S.) 1902. 6 M.

II. Bd. No. 4. **Prasad, G.,** *Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat.* 4. (68 S.) 1903. 6 M.

III. Bd. No. 1. **Ehlers, E.,** *Neuseeländische Anneliden.* Mit 9 Tafeln. 4. (79 S.) 1904. 10 M.

III. Bd. No. 2. **Koenen, A. v.,** *Ueber die Untere Kreide Helgolands und ihre Ammonitiden.* Mit 4 Tafeln. 4. (63 S.) 1904. 4 M.

III. Bd. No. 3. **Schur u. Ambronn,** *Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsoldschen 6zöll. Heliometer der Sternwarte zu Göttingen.* 4. (126 S. u. 2 Taf.) 1905. 12 M.

III. Bd. No. 4. **Brendel, M.,** *Theorie des Mondes.* 4. (97 S.) 1905. 7 M.

III. Bd. No. 5. **Linke, F.,** *Luftelektrische Messungen bei 12 Ballonfahrten.* Mit 4 Tafeln 4. (30 S.) 1904. 6 M.

IV. Bd. No. 1. **Schwarzschild, K.,** *Untersuchungen zur geometrischen Optik.* I. Einleitung in die Fehlertheorie optischer Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs. Mit 6 Fig. 4. (31 S.) 1905. 2 M.

IV. Bd. No. 2. **Schwarzschild, K.,** *Untersuchungen zur geometrischen Optik.* II. Theorie der Spiegeltelescope. Mit 9 Fig. 4. (28 S.) 1905. 2 M.

IV. Bd. No. 3. **Schwarzschild, K.,** *Untersuchungen zur geometrischen Optik.* III. Ueber die astrophotographischen Objektive. Mit 10 Fig. 4. (54 S.) 1905. 4 M.

IV. Bd. No. 4. **Verworn, M.,** *Die archaeolithische Cultur in den Hipparionschichten von Aurillac. (Cantal).* Mit 5 Taf. 4. (56 S.) 1905. 4 M. 50 Pf.

IV. Bd. No. 5. **Meyermann, B.,** *Vermessung der Umgebung des Orionnebels.* 4. (47 S.) 1906. 3 M. 50 Pf.

V. Bd. No. 1. **Kohlschütter, E.,** *Ergebnisse der Ostafrikanischen Pendelexpedition v. J. 1899 u. 1900.* Mit 16 Tafeln u. 8 Figuren im Text. 4. (VIII u. 229 S.) 1907. 26 M.

V. Bd. No. 2. **Schwarzschild, K.,** *Ueber die totale Sonnenfinsternis vom 30. August 1905.* Mit 5 Tafeln. 4. (73 S.) 1907. 6 M.

V. Bd. No. 3. **Kramer, J,** *Theorie der kleinen Planeten vom Hekubatypus.* 4. (154 S.) 1907. 14 M.

V. Bd. No. 4. **Ehlers, E.,** *Neuseeländische Anneliden. II.* Mit 16 Figuren. 4. (31 S.) 1907. 2 M.

V. Bd. No. 5. **Gerdien. H.,** *Untersuchungen über die atmosphärischen radioaktiven Induktionen.* Mit 4 Tafeln. 4. (74 S.) 1907. 7 M.

VI. Bd. Nr. 1. **Pütter, August,** *Studien zur vergleichenden Physiologie des Stoffwechsels.* 4. (79 S.) 1908. 5 M.

VI. Bd. No. 2. **Holm, Ragnar,** *Experimentelle Untersuchungen über die geschichtete positive Glimmlichtsäule, insbesondere über das Schichtenpotential in H_2 N_2 He.* Mit 3 Tafeln und 6 Figuren im Text. 4. (50 S.) 4 M.

Für die Redaktion verantwortlich: F. Leo, d. Z. vorsitzender Sekretär d. Kgl. Ges. d. Wiss.
Ausgegeben am 5. Oktober 1908.
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

1908. Heft 4.

Inhalt:

Berlin,
Weidmannsche Buchhandlung.
1908.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 7. November 1908.

E. Schwartz liest: Über Kirchengeschichte. (Gesch. Mitt. S. 106.)

F. Leo berichtet über die Hallerfeier in Bern vom 15. und 16. Oktober. (Gesch. Mitt. S. 123.)

Ordentliche Sitzung am 21. November 1908.

E. Riecke legt die neue Auflage seines Lehrbuchs der Physik vor und knüpft daran eine Mitteilung über die Bewegung der α-Strahlen des Radiums.

H. Oldenberg, Die Hymnen des Rig-Veda, I—VI. Kritische und exegetische Noten. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

J. Wackernagel legt für die Abhandlungen der phil.-hist. Kl. vor: J. Hertel, Ausgabe der Tanträkhyäyikā.

Ordentliche Sitzung am 5. Dezember 1908.

F. Leo legt Band VI der Oxyrynchos-Papyri mit den Bruchstücken der Euripideischen Hypsipyle vor.

Ordentliche Sitzung am 19. Dezember 1908.

F. Klein legt vor: P. Koebe, Conforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die ebene Fläche eines Kreises. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1908, S. 337.)

W. Voigt legt vor: F. Krüger, Zur Kritik des Dissociationsgleichgewichtes und der Reactionsgeschwindigkeit. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1908, S. 318.)

H. Wagner legt die neue Auflage seines Lehrbuchs der Geographie Bd. I vor.

Derselbe legt vor: A. Wolkenhauer, Seb. Münsters handschriftliches Collegienbuch aus den Jahren 1515—18 und seine Karten. (Erscheint in den Abhandlungen, phil.-hist. Kl.)

J. Wackernagel legt den Bericht des correspondierenden Mitgliedes H. Lüders über die Conferenz der Mahābhārata-Commission in Kopenhagen nebst der Druckprobe einer kritischen Ausgabe vor.

Fortsetzung auf der 3. Umschlagseite.



Ueber die Temperaturabhängigkeit der Valenz zwischen Metallen und Sauerstoff.

Von

Wilhelm Biltz.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Oktober 1908 von O. Wallach.

Seit der Zeit, als man sich mit der Auffassung hatte vertraut machen müssen, daß die Wertigkeit keine konstante Eigenschaft der Elementaratome sei, sondern von Fall zu Fall wechsele, wurde die Frage nach der Ursache dieses Wechsels dahin beantwortet, daß er zunächst durch die Natur der verbundenen Elementenpaare bedingt sei, und daß er ferner von der Temperatur und dem Drucke abhänge. Wie indessen die Wertigkeit eines Elementes einem anderen oder einer Gattung von anderen gegenüber von der Temperatur und dem Drucke beeinflußt wird, darüber ist zusammenhängendes bisher noch nicht bekannt.

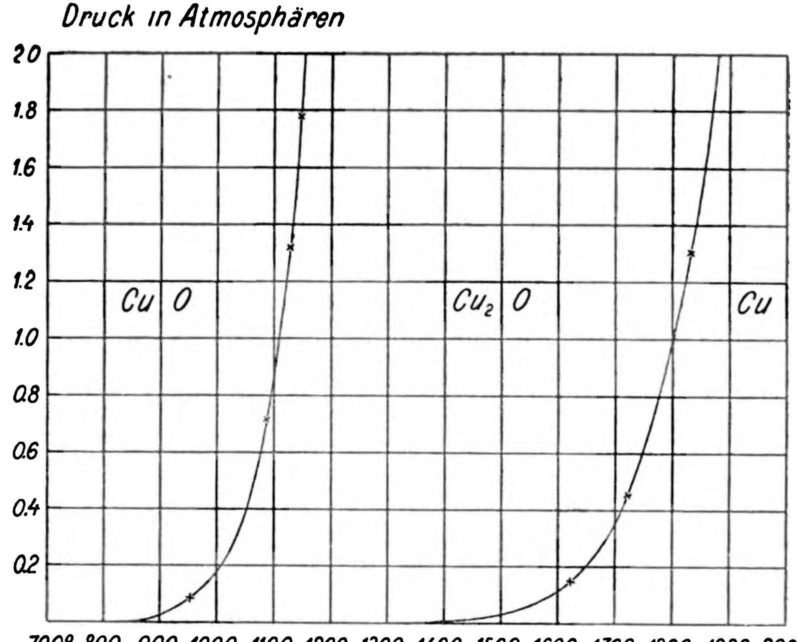
Es handelt sich bei dieser Aufgabe darum, zunächst für ein verschiedenwertig auftretendes Element die Grenzen zu ermitteln, innerhalb derer es eine konstante Valenz zeigt, und dann diese Wertigkeitsgrenzen miteinander zu vergleichen. Die Schwierigkeit, die ohne Einführung von Hypothesen nicht überwindbar zu sein scheint, liegt für eine große Anzahl von Verbindungen darin, daß Grenzen dieser Art nicht existieren, sondern Valenzstufen verschiedenen Grades nebeneinander vorkommen. Es ist nicht möglich, anzugeben, bei welcher Temperaturgrenze Phosphor gegenüber Chlor aus dem fünfwertigen in den dreiwertigen Wirkungsgrad übergeht, weil sich beide Formen im Gaszustand nebeneinander in einem unvollständigen, homogenen Gleichgewichte befinden.

Günstiger liegt die Aufgabe da, wo verschiedene Wertigkeitsstufen durch heterogene, vollständige Gleichgewichte verknüpft sind, wo also eine kleine Aenderung der Temperatur oder des Druckes einen vollständigen Uebergang der einen Form in die andere zur Folge haben kann. Vollständige Gleichgewichte dieser Art finden sich zahlreich unter den Sauerstoffverbindungen der Metalle, wo als Phasen höheres Metalloxyd, niederes Metalloxyd und Sauerstoff oder Metalloxyd, Metall und Sauerstoff auftreten; letzteres, wenn wir die Betrachtung bis auf das Nullwerden der Metall-Sauerstoff-valenz ausdehnen, zugleich also die Frage nach der mehr oder minder edlen Natur der Metalle mit hineinbeziehen. Die Oxydgleichgewichte bilden den besten Angriffspunkt, der Frage nach dem Temperaturkoeffizienten der Valenz näher zu treten; immerhin muß zur Zeit die Behandlung der Aufgabe noch unvollkommen sein und das nachstehende kann daher nur als ein vorläufiger Versuch auf diesem Gebiete betrachtet werden.

Erwärmt man ein Metalloxyd bei konstantem Sauerstoffdrucke, so tritt bei einer bestimmten Temperatur vollständige Dissoziation in ein niederes Oxyd oder in das freie Metall und Sauerstoff ein. Die Gesamtheit aller zugehörigen Grenzpunkte von Temperatur und Druck ergeben die Dissoziationskurve des zerfallenden Oxyds, die durchaus einer Dampfspannungskurve zu vergleichen ist. Die Kurven der Dissoziationstensionen trennen somit die Existenzgebiete der einzelnen Oxyde und ich möchte sie im folgenden zur anschaulichen Kennzeichnung ihrer Bedeutung Wertigkeitsgrenzen nennen. In der Figur 1 sind die Wertigkeitsgrenzen zwischen Kupfer und Sauerstoff gezeichnet; als Abszissen dienen die Temperaturen in Celsiusgraden, als Ordinaten die Drucke in Atmosphären. Die Tensionskurve des Kupferoxyds bildet die rechte Grenze des Existenzgebietes dieses Stoffes; es folgt das Beständigkeitsgebiet des Kupferoxyduls, das durch seine Tensionskurve von dem Gebiete getrennt ist, in dem die Wertigkeit des Kupfers gegen Sauerstoff Null ist, also beide unverbunden nebeneinander existieren. Bei dem Partialdrucke des atmosphärischen Sauerstoffes z. B. würde bei 1010° Kupferoxyd in Oxydul übergehen und bei 1670° Kupferoxydul den Rest Sauerstoff verlieren.

Vergleicht man Punkte der Wertigkeitsgrenzen von gleichem Sauerstoffdruck, so erhält man in der Zusammenstellung der zugehörigen Temperaturen die gesuchte Abhängigkeit von Valenz und Temperatur, also die Daten für eine Valenzisobare.

Wie man sieht, ist die Feststellung der Wertigkeitsgrenzen zunächst eine Aufgabe rein experimenteller Natur und in der Tat



Figur 1.

sind wir bereits besonders durch die Arbeiten Lothar Wöhlers im Besitze wertvollen Materials, das allerdings zum weitaus größten Teile auf die leicht zerfallenden Oxyde edlerer Metalle beschränkt ist. Der direkten Bestimmung der vollständigen Wertigkeitsgrenzen schwer reduzierbarer Oxyde dürften sich kaum überwindbare Schwierigkeiten entgegenstellen, da bei einigermaßen beträchtlichen Sauerstoffdrucken die Dissoziationstemperaturen höher werden, als die Gefäßmaterialien aushalten. Indirekte experimentelle Wege würden hier, wie jüngst Sackur[1]) in einer allgemeineren Darstellung erläutert hat, zum Ziele führen. In Ermanglung zahlreicherer solcher mittelbarer Messungen sind wir indessen auf den Weg der Rechnung angewiesen.

Nernst[2]) hat gezeigt, daß man auf Grund seines Wärmetheorems für heterogene Gleichgewichte zu einem Näherungsausdruck gelangen kann, in welchem die Variabeln unserer Wertigkeitsgrenzen in Abhängigkeit von der Dissoziationswärme und den

1) O. Sackur, Die chemische Affinität, Braunschweig 1908, S. 60 ff.

2) Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Mathem.-physik. Kl., 1906, Heft 1.

chemischen Konstanten eines Mols des vergasten Stoffes stehen. Bezeichnet p den Dissoziationsdruck in Atmosphären, T die absolute Dissoziationstemperatur, Q die Dissoziationswärme in gr Kalorieen und C die chemische Konstante, so gilt annähernd die Beziehung:

$$\log p = -\frac{Q}{4.57\,T} + 1.75 \log T + C$$

C ist für Sauerstoff 2.8. Sind die Bildungswärmen der Oxyde oder ihre Dissoziationswärmen bekannt, so sind die Wertigkeitsgrenzen berechenbar. Wir gewinnen auf diesem Wege eine Vorstellung auch von den Existenzgebieten sehr stabiler Oxyde, wobei freilich zu berücksichtigen ist, daß manche der so errechneten Kurven nicht vollständig realisierbar sind, weil zum Teil bei den fraglichen Temperaturen Schmelzen und Vermischung oder Vergasung der Oxyde oder der Metalle eintritt; die gefundenen Temperaturen sind dann nur Rechengrößen. Beträchtliche Fehler werden ferner durch die Unsicherheit vieler kalorimetrischer Messungen bedingt, zumal die Reaktionswärmen multipliziert in die Rechnung eingehen.

Da die Nernstsche Gleichung bisher nur an wenigen Oxydgleichgewichten geprüft ist, werden als Belege zunächst einige Beispiele dieser Art mitgeteilt werden, bei denen die aus Tensionswerten berechneten Dissoziationswärmen mit kalorimetrisch oder anderweitig ermittelten Daten verglichen sind.

1. Zerfall von Palladiumoxydul.

Lothar Wöhler[1]) hat die Sauerstofftensionen des Palladiumoxyduls nach der statisch manometrischen Methode gemessen. In der folgenden Tabelle sind die aus einigen seiner Werte berechneten Dissoziationswärmen neben den Temperatur- und Druckwerten angegeben. Die Wärmemengen werden der Kürze halber stets nach großen Kalorieen gerechnet. Die Zahlen unterhalb des Striches entstammen einer zweiten, unabhängigen Versuchsreihe Wöhlers.

1) Z. f. Elektrochemie **11**, 836 [1905].

T	p	Q
1013°	0.054	43.2
1126	0.70	42.7
1150	1.01	42.8
1029	0.088	42.9
1133	0.94	42.3
	Mittel	42.8

Da Q die zur Entbindung eines Moleküls Sauerstoff nötige Wärmemenge ist, so wird die Dissoziationswärme eines Moleküls Palladiumoxydul:

$$PdO = Pd + O$$

gleich −21.4 Cal. Thomsen fand 22.7. Nach der van't Hoffschen Gleichung berechnete Wöhler aus einigen Messungspaaren bei 22.8 und 25.4 Cal. liegende Wärmemengen.

2. Zerfall von Iridiumdioxyd.

Wöhler[1]) berechnete nach van't Hoff aus mehreren Druckwerten seiner Kurve als Dissoziationswärme pro Mol Dioxyd 49.3 Cal. Nach Nernst ergab sich der nahe gelegene Wert 52 Cal.

3. Zerfall von Silberoxyd.

Einige Werte der Kurve bei hohen Drucken hat Lewis[2]) gemessen und aus diesen nach van't Hoff die Sauerstofftension bei 25° Celsius berechnet. Wir finden, wie oben:

T	p	Q
298°	5.10^{-4}	14.2
575	20.5	16.6
598	32	16.8
718	207	18.0

1) Z. f. Elektrochemie **14**, 97 [1908].
2) Z. f. physik. Chemie **55**, 449 [1906].

Die Dissoziationswärmen steigen hier merklich mit der Temperatur. Für 25° folgt:

$$Ag_2O = Ag + O - 7.1 \text{ Cal.}$$

in Uebereinstimmung mit der Messung Berthelots, die 7.0 ergab, und in guter Annäherung an die kritisch von Lewis gesichteten Wärmemengen, deren Mittel 6.34 ist.

4. Uebergang von Baryumsuperoxyd in Baryumoxyd.

Die Tension von Baryumsuperoxyd hat Le Chatelier[1]) statisch gemessen. Aus einigen seiner Werte folgt:

T	p	Q
943°	0.105	38.7
1023	0.447	39.4
1063	0.882	39.5
	Mittel	39.2

Hieraus ergibt sich auf Zimmertemperatur extrapoliert die Wärmeentwicklung:

$$BaO_2 = BaO + O - 17.5 \text{ Cal.}$$

Dieser Wert stimmt nicht mit dem Berthelotschen[2]), auch von Landolt und Börnstein aufgenommenen, 12.1, überein. Die Berthelotsche Zahl ist indessen, wie Ostwald[3]) gezeigt hat, infolge der Einbeziehung einer falschen Lösungswärme unrichtig. Der von Ostwald neuberechnete Wert 17.2 schließt sich dem thermodynamisch berechneten sehr viel besser an.

5. Zerfall von Platinoxydul.

L. Wöhler gibt an, daß sich Platinoxydul in reinem Sauerstoff zwischen 510 und 560° zersetzt[4]). Wir benutzen zur Rechnung den Wert $t = 540°$ und finden $Q = 29.3$ Cal. bezw.:

$$PtO = Pt + O - 14.7 \text{ Cal.}$$

Nach Thomsen gilt:

$$Pt(OH)_2 = Pt + O + H_2O - 17.9 \text{ Cal.}$$

1) Compt. Rend. **115**, 655 [1892].
2) Ann. Chim. Phys. [5] **6**, 212 [1875].
3) Lehrbuch der allgemeinen Chemie II_1, 256, 257 [1893].
4) Z. f. anorg. Chem. **40**, 448 [1904].

Zur Kritik dieser Zahl ist folgendes zu bemerken: Nach Wöhler[1]) existieren hydratische Oxyde der Edelmetalle, die unter Wärmeabgabe zerfallen. Trotzdem kann man aber, da diese abnormen Erscheinungen hier wohl, wie bei dem von Ruer[2]) untersuchten Zirkonhydrat, auf eine besondere Zustandsform zurückzuführen sind, die von Thomsen gefundene Wärmeaufnahme beim Zerfall des Hydrates mit dem Wert der Bildungswärme des wasserfreien Oxyduls identifizieren, zumal sich die Bildungswärmen des hydratischen und nicht hydratisierten Kupferoxyds nur um 0.3 Cal. unterscheiden. Wöhler hat indessen darauf aufmerksam gemacht[3]), daß der Thomsensche Wert 17.9 an sich zu hoch ist, weil das nach Thomsens Vorschrift bereitete Oxydul 10—30% Platinoxyd enthalte. Man kann die zur Korrektur nötige Wärmemenge schätzen, wenn berücksichtigt wird, daß unter einer Atmosphäre Sauerstoff wasserfreies Platinoxyd bei ca. 440° zerfällt[4]), woraus nach Nernst folgt:

$$PtO_2 = PtO + O - 12{,}7 \text{ Cal.}^{5)}.$$

Da das Thomsensche Platinoxydul zu im Mittel 20% durch Oxyd verunreinigt war, so ist also von dessen Bildungswärme ein Fünftel des eben erhaltenen Betrages abzuziehen und es folgt als korrigierte Bildungswärme des Oxyduls 17.9—2.5 = 15.4 gegenüber dem thermodynamisch erhaltenen Wert 14.7.

Die Zusammenstellung der gefundenen und berechneten Wärmemengen bestätigt übersichtlich die Gültigkeit der Nernstschen Formel auf dem Gebiete der Metalloxydgleichgewichte[6]).

1) Z. f. anorg. Chem. **46**, 331 [1905].

2) Z. f. anorg. Chem. **43**, 298 [1905].

3) Z. f. anorg. Chem. **46**, 343 [1905].

4) Platinoxydulhydrat zerfällt bei ca. 400°, Platinoxydul (wasserfrei) zerfällt bei 540°, Platinoxydhydrat zerfällt bei ca. 300°, Platinoxyd (wasserfrei) also vermutlich bei ca. 440°.

5) Wöhler gibt, ohne die Quelle zu nennen, als Wärmemenge für diese Reaktion ca. 20 Cal. an.

6) Ein weiteres Beispiel vgl. bei O. Sackur, Die chemische Affinität, Braunschweig 1908, S. 65.

Reaktion	Q nach Nernst berechnet.	Q anderweitig gefunden.
$PdO = Pd + O$	−21.4	−22.7
$IrO_2 = Ir + O_2$	−52	−49.3
$Ag_2O = Ag + O$	− 7.1	− 7.0
$BaO_2 = BaO + O$	−17.5	−17.2
$PtO = Pt + O$	−14.7	−15.4

Die Daten für die Wertigkeitsgrenzen werden im Folgenden nach steigender Höhe der Zersetzungstemperaturen des niedrigsten Oxyds geordnet, aufgeführt.

1. Platinoxyde.

a) Uebergang von Platinoxyd in Platinoxydul.

Wir benutzen den oben aus der Zersetzungstemperatur berechneten ziemlich unsicheren Wert 12.7 und runden ihn für die Festlegung der Wertigkeitsgrenze ab:

$$2PtO_2 = 2PtO + O_2 - 25 \text{ Cal.}$$

Dann ergeben sich nach der Nernstschen Gleichung folgende Zahlen:

T	t	p
600°	327°	0.035
650	377	0.20
700	427	0.93
730	457	2.09

b) Zerfall von Platinoxydul in die Elemente.

Der korrigierte kalometrische Wert für den Zerfall unter Abgabe eines Mols Sauerstoff war 30.8, der aus der Zersetzungstemperatur des Oxyduls im Sauerstoffstrome berechnete 29.3. Wir benutzen:

$$2PtO = 2Pt + O_2 - 30 \text{ Cal.}$$

T	t	p
700°	427°	0.025
750	477	0.12
800	527	0.47
850	577	1.62

Für sehr niedrige Temperaturen ist der Sauerstoffdruck der Oxyde durchweg sehr klein, aber endlich; alle Wertigkeitsgrenzen gehen vom Nullpunkt der Temperatur aus, entfernen sich zunächst kaum merklich von der Abszissenaxe, steigen mit größer werdendem Sauerstoffdrucke schneller und oberhalb einer halben bis einer Atmosphäre recht schnell. Der Kurventypus, der aus der Zeichnung der Wertigkeitsgrenzen des Kupfers zu ersehen ist, kehrt immer wieder; nur werden, wie auch dort schon der Vergleich der CuO/Cu_2O und Cu_2O/Cu Grenze zeigt, die Kurven um so weniger steil, je höher das Temperaturgebiet ist, in dem sie liegen.

Die Wertigkeitsgrenzen des Platins liegen ziemlich dicht beisammen, das Existenzgebiet des Platinoxyduls ist also klein.

2. Palladiumoxyde.

a) Uebergang von Palladiumoxyd in Palladiumoxydul.

Der Wärmeverbrauch berechnet sich aus den Thomsenschen Bildungswärmen der hydratischen Oxyde, die denen der wasserfreien gleichgesetzt werden.

$$2\,PdO_2 = 2\,PdO + O_2 - 15.4 \text{ Cal.}$$

T	t	p
400°	127°	0.085
425	152	0.29
450	177	0.89
465	192	1.66

Für den Sauerstoffdruck einer Atmosphäre findet man durch Interpolation aus der Kurve die Dissoziationstemperatur $t = 180^0$ in hinreichender Uebereinstimmung mit einer Angabe Wöhlers[1]),

1) Z. f. anorg. Chem. **46**. 332 [1905].

nach der unter dieser Bedingung wasserhaltiges Palladiumoxyd oberhalb 200° zu Oxydul reduziert wird.

b) Zerfall von Palladiumoxydul in die Elemente.

Die Kurve ist von Wöhler[1]) gemessen. Nach dem oben erhaltenen Mittelwerte der aus dieser berechneten Dissoziationswärmen ergänzen wir die Kurve über ein weiteres Druckgebiet.

$$2PdO = 2Pd + O_2 - 42.8 \text{ Cal.}$$

T	t	p
950°	677°	0.014
1080	807	0.28
1160	887	1.23
1170	897	1.48

Bei p = 1 dissoziierte Palladiumoxyd bei 180°, Palladiumoxydul dissoziiert bei 875°; das Existenzgebiet des Palladiumoxyduls ist also bedeutend größer, als das des Platinoxyduls.

3. Kupferoxyde.

a) Uebergang von Kupferoxyd in Kupferoxydul.

Die Messung der Tension des Kupferoxyds wird nach L. Wöhler durch die Bildung fester Lösungen der Oxyde erschwert[2]). Wöhler berechnet nach van't Hoff die Kurve aus dem besten Werte t = 960°, p = 50 mm und der Thomsenschen Reaktionswärme: $2CuO = Cu_2O + O - 33.5$ Cal. Nach Nernst finden wir aus Wöhlers Zahlen zwar konstante Dissoziationswärmen, die aber statt 33.5 im Mittel nur 26.2 betragen. Da die von Wöhler gemessene Tension nicht sehr weit von der Wahrheit entfernt sein dürfte, empfiehlt es sich, unter Verzicht auf den kalorimetrischen Wert mit der aus jener Tension berechneten Dissoziationswärme die Kurve zu ergänzen.

$$4CuO = 2Cu_2O + O_2 - 52.4 \text{ Cal.}$$

1) Z. f. Elektrochem. 11, 836 [1905]; vgl. ebenda 12, 781 [1906].
2) Z. f. Elektrochem. 12, 781 [1906].

T	t	p
1233°	960°	0.066
1323	1050	0.41
1360	1087	0.71
1400	1127	1.32
1420	1147	1.78

Für die Zersetzung von Kupferoxyd in Luft, $p = 0.21$, finden wir die Temperatur $t = 1010°$.

Mit Hilfe der Dulongschen Dissoziationswärme: $4\,CuO = 2\,Cu_2O + O_2 - 70$ Kal. hat Stahl[1]) jüngst diese Wertigkeitsgrenze berechnet, aus welcher der sicherlich zu hohe Wert $t = 1406°$ folgt.

b) Zerfall von Kupferoxydul in die Elemente.

Nach Thomsen gilt:

$$2\,Cu_2O = 4\,Cu + O_2 - 81.6 \text{ Cal.}$$

Daraus folgt:

T	t	p
1900°	1627°	0.14
2000	1727	0.45
2100	1827	1.29
2300	2027	8.4

In Luft dissoziiert Kupferoxydul demnach bei 1670°. Stahl, der dieselbe Rechnung mit dem gleichen Resultat durchführte, gibt an, daß diese Zersetzungstemperatur mit den Erfahrungen, die an Mansfelder Kupferraffinieröfen gemacht wurden, gut zu vereinbaren ist.

4. Thalliumoxyde.

a) Uebergang von Thalliumoxyd in Thalliumoxydul.

Nach Thomsen beträgt die Bildungswärme von hydratischem Thalliumoxyd 86.4 Cal. Wir benutzen für wasserfreies Oxyd den etwas niedrigeren Wert 85 und ermitteln hieraus und aus der ab-

1) Stahl, Metallurgie, 4, 685 [1907]

gerundeten Bildungswärme des wasserfreien Thalliumoxyduls die Dissoziationswärme:

$$\begin{array}{rcl} Tl_2O_3 & = & 2Tl + 3O - 85 \text{ Cal.} \\ Tl_2O & = & 2Tl + O - 42 \text{ Cal.} \\ \hline Tl_2O_3 & = & Tl_2O + O_2 - 43 \text{ Cal.} \end{array}$$

T	t	p
1000°	727°	0.044
1100	827	0.37
1200	927	2.24

In Luft dissoziiert Thallioxyd demnach bei 810°. Uebereinstimmend beobachtete Rabe[1]), daß das Oxyd bei 600° und bei seinem Schmelzpunkte 725° stabil ist und sich erst bei heller Rotglut zerlegt.

b) Zerfall von Thalliumoxydul in die Elemente.

Wir benutzen den kalorimetrischen Wert:

$$2Tl_2O = 4Tl + O_2 - 84 \text{ Cal.}$$

T	t	p
1800°	1527°	0.020
2000	1727	0.25
2150	1877	1.20

5. Bleioxyde.

a) Uebergang von Bleisuperoxyd in Mennige.

Debray[2]) fand, daß Bleisuperoxyd, in Luft auf 350° erhitzt, zunächst Bleisesquioxyd, Pb_2O_3, liefert, das bei weiterem Verweilen in dieser Temperatur sehr langsam in Mennige übergeht. Der Wärmeverbrauch bei der Dissoziation: Bleisuperoxyd-Mennige

1) Z. f. anorg. Chem. 55, 142 [1907].
2) Compt. Rend. 86, 513 [1878].

berechnet sich auf Grund dieser Angabe nach Nernst zu 23.8 Cal., wonach die Wertigkeitsgrenze berechnet wurde.

$$3PbO_2 = Pb_3O_4 + O_2 - 23.8 \text{ Cal.}$$

T	t	p
550°	277°	0.015
623	350	0.21
700	427	2.19

b) Uebergang von Mennige in Bleioxyd.

Die Tension der Mennige ist von Le Chatelier[1]) nach der statischen Methode bestimmt worden. Aus seinen Daten folgen die nachstehenden Dissoziationswärmen:

T	t	p	Q
718°	445°	0.0066	32.7
773	500	0.079	31.6
828	555	0.24	32.2
		Mittel	32.2

$$2Pb_3O_4 = 6PbO + O_2 - 32.2 \text{ Cal.}$$

Zur Ergänzung der Tensionskurve fügen wir noch das hieraus berechnete Wertepaar, t = 640°; p = 1.86, hinzu.

Das Existenzgebiet der Mennige liegt bei p = 0.21 zwischen 360° und 550°, was durchaus dem Rezepte entspricht, nach dem man zur Darstellung der Mennige Bleioxyd an der Luft auf 500° erhitzen soll.

Eine weitere Kontrolle dieser Wertigkeitsgrenzen PbO_2/Pb_3O_4 und Pb_3O_4/PbO ermöglicht der Vergleich mit der kalorimetrisch von Tscheltzow[2]) bestimmten Dissoziationswärme:

$$PbO_2 = PbO + O - 12.1 \text{ Cal.}$$

Die thermodynamisch aus den Tensionskurven erhaltenen Wärmemengen gestatten die Berechnung dieser Dissoziationswärme, wie folgt:

1) Bull. Soc. chim. [3] **17**, 791 [1897].

2) Compt. Rend. **100**, 1458 [1885].

$$6\,PbO_2 = 2\,Pb_3O_4 + 4\,O - 47.6 \text{ Cal.}$$
$$2\,Pb_3O_4 = 6\,PbO + 2\,O - 32.2 \text{ Cal.}$$
$$6\,PbO_2 = 6\,PbO + 6\,O - 79.8 \text{ Cal.}$$
$$PbO_2 = PbO + O - 13.3 \text{ Cal.}$$

c) Zerfall von Bleioxyd in die Elemente.

$$2\,PbO = 2\,Pb + O_2 - 100.6 \text{ Cal. (Thomsen)}$$

T	t	p
2000°	1727°	0.0038
2300	2027	0.13
2500	2227	0.87
2600	2327	2.04

Stahl findet die entsprechenden Werte, deren höhere bei der niedrigen Verdampfungstemperatur des Bleioxyds unmittelbar nur als Rechengrößen gelten dürfen.

6) Antimonoxyde.

a) Uebergang von Antimonpentoxyd in Antimontetroxyd.

Ueber diesen Zerfall existiert nur eine, sehr unsichere Angabe von Baubigny[1]), nach der in Luft unterhalb 440° die Reaktion merklich werden soll. Aus t = 400°; p = 0.21 berechnet sich der Wärmeverbrauch 26 Cal.

$$2\,Sb_2O_5 = 2\,Sb_2O_4 + O_2 - 26 \text{ Cal.}$$

T	t	p
620°	347°	0.032
673	400	0.21
710	437	0.60
745	472	1.58

1) Compt. Rend. 124, 499, 560 [1897].

b) Uebergang von Antimontetroxyd in Antimontrioxyd.

Antimontetroxyd dissoziiert nach Baubigny in Luft erst oberhalb Silberschmelzhitze. Wir folgern aus $t = 970^0$; $p = 0.21$:

$$2\,Sb_2O_4 = 2\,Sb_2O_3 + O_2 - 50.5 \text{ Cal.}$$

T	t	p
1200°	927°	0.095
1243	970	0.21
1300	1027	0.56
1360	1087	1.41

Der Wärmeverbrauch beim direkten Uebergang von Pentoxyd zu Trioxyd läßt sich aus den Thomsenschen Bildungswärmen der Hydrate berechnen; doch stimmt hier diese Zahl nicht, wie es beim Blei der Fall war, mit der aus den Wärmemengen bei stufenweisem Zerfall erhaltenen überein.

c) Zerfall von Antimontrioxyd in die Elemente.

Unter Benutzung der Bildungswärme des hydratischen Oxyds ergibt sich:

$$\tfrac{2}{3}\,Sb_2O_3 = \tfrac{4}{3}\,Sb + O_2 - 111.6 \text{ Cal.}$$

T	t	p
2500°	2227°	0.096
2700	2427	0.58
2850	2577	1.86

7. Kobaltoxyde.

a) Uebergang von Kobaltsesquioxyd in Kobaltoxydul.

Die Dissoziationswärme ergibt sich aus der Thomsenschen Bildungswärme des hydratischen Kobaltsesquioxyds und der Dulongschen Bildungswärme des Kobaltoxyduls.

$$Co_2O_3 = 2\,Co + 3\,O - 149.4 \text{ Cal.}$$
$$2\,CoO = 2\,Co + 2\,O - 127.6 \text{ Cal.}$$

$$Co_2O_3 = 2\,CoO + O - 21.8 \text{ Cal.}$$
$$2\,Co_2O_3 = 4\,CoO + O_2 - 43.6 \text{ Cal.}$$

T	t	p
1000°	727°	0.032
1100	827	0.28
1150	877	0.73
1200	927	1.74

Die unmittelbare Dissoziation von Sesquioxyd zu Oxydul läßt sich nicht verwirklichen; denn das Sesquioxyd liefert zunächst Oxyduloxyd, das seinerseits zerfällt. Der Sesquioxydzerfall liegt niedriger, der Oxyduloxydzerfall höher [1]), als die somit nur als Durchschnittswert Gültigkeit besitzende, berechnete Temperatur.

b) Zerfall von Kobaltoxydul in die Elemente.

$$2\,CoO = 2\,Co + O_2 - 127.6 \text{ Cal. (Dulong)}$$

T	t	p
2750°	2477°	0.046
2900	2627	0.17
3100	2827	0.80
3200	2927	1.58
3250	2977	2.24

8. Eisenoxyde.

Die Dissoziationswärmen der Oxyde sind von Le Chatelier [2]) gemessen:

1) $6\,Fe_2O_3 = 4\,Fe_3O_4 + O_2 - 88.8$ Cal.
2) $2\,Fe_3O_4 = 6\,FeO + O_2 - 151.2$ Cal.
3) $2\,FeO = 2\,Fe + O_2 - 129.2$ Cal.
4) $\frac{1}{2}\,Fe_3O_4 = 1\frac{1}{2}\,Fe + O_2 - 134.7$ Cal.

1) Nach einer soeben erschienenen Mitteilung von H. W. Foote und E. K. Smith (Journ. Amer. Chem. Soc. **30**, 1344 [1908]) erreicht Kobaltoxyduloxyd bei 905° den Sauerstoffdruck der Luft; für den Uebergang von Sesquioxyd in Oxyd berechnet sich aus unseren Zahlen 805°. Die mit Benutzung jenes Wertes ermittelte Valenzisobare würde sich der im folgenden abgeleiteten Regel noch besser fügen, als die gezeichnete. Vgl. S. 22.

2) Compt. Rend. **120**, 623 [1895].

Der Vergleich dieser Dissoziationswärmen zeigt die merkwürdige Tatsache an, daß Eisenoxyduloxyd in einer Sauerstoffatmosphäre bei einer niedrigeren Temperatur in die Elemente zerfällt (134.7 Cal.), als in Sauerstoff und Eisenoxydul (151.2 Cal.), das seinerseits wieder bei niedrigerer Temperatur (129.2 Cal.) zu Metall reduziert wird, als das Oxyduloxyd [1]). Eine Bedeutung für uns hat also nur die Berechnung der Wertigkeitsgrenzen Fe_2O_3/Fe_3O_4 und Fe_3O_4/Fe nach den Gleichungen 1) und 4).

a) Uebergang von Eisenoxyd in Eisenoxyduloxyd.

T	t	p
2000°	1727°	0.073
2200	1927	0.66
2300	2027	1.70

Der Dissoziationstemperatur, t = 1815°; p = 0.21, entspricht die bekannte Bildungsweise des Oxyduloxyds bei sehr hohen Hitzegraden [2]).

b) Zerfall von Eisenoxyduloxyd in die Elemente.

T	t	p
2800°	2527°	0.021
3040	2767	0.16
3200	2927	0.53
3320	3047	1.20
3380	3107	1.78

An diesem Beispiel wird recht deutlich, wie relativ schwach die Wertigkeitsgrenzen in sehr hohen Temperaturgebieten ansteigen. Dem Steigen der Tension von 0.2 auf 0.4 Atmosphären entspricht hier ein Temperaturzuwachs von ca. 80°, während hier-

1) Die Berechnung der Tensionskurven der Eisenoxyde aus thermischen Daten hat bereits v. Jüptner ausgeführt, ohne, soweit aus der mir zugänglichen Veröffentlichung zu ersehen ist, das Eigentümliche dieser Beziehungen besonders zu betonen. Metallurgie 4, 706 [1907].

2) P. T. Walden, Journ. Amer. Chem. Soc. 30, 1350 [1908], fand ganz neuerdings den sehr viel niedrigeren Wert 1350°. Die Neigung der Valenzisobare würde hierdurch verhältnismäßig nicht sehr stark beeinflußt werden. Vgl. S. 314.

für bei der Dissoziation von Palladiumoxydul ein solcher von ca. 40° und bei dem Palladiumdioxyd ein solcher von 15° genügte.

9. Manganoxyde.

a) Uebergang von Mangandioxyd in Mangansesquioxyd.

Dieses Gleichgewicht haben R. J. Meyer und K. Rötgers[1]) nach der dynamischen Methode in Luft und in reinem Sauerstoff gemessen. Nach Nernst berechnet sich daraus der Wärmeverbrauch.

T	t	p	Q
803°	530°	0.21	31.4
838	565	1.00	30.3
		Mittel	30.9

$$4\,MnO_2 = 2\,Mn_2O_3 + O_2 - 30.9 \text{ Cal.}$$

Mit diesem Mittelwert wird die Wertigkeitsgrenze ergänzt.

T	t	p
750°	477°	0.065
803	530	0.21
838	565	1.00
860	587	1.20

b) Uebergang von Mangansesquioxyd in Manganoxyduloxyd.

Nach den Messungen von Meyer und Rötgers folgt, wie oben:

T	t	p	Q
1213°	940°	0.21	49.2
1363	1090	1.00	51.6
		Mittel	50.4

$$6\,Mn_2O_3 = 4\,Mn_3O_4 + O_2 - 50.4 \text{ Cal.}$$

Ergänzt ergibt sich:

1) Z. f. anorg. Chem. 57, 104 [1908].

T	t	p
1160°	887°	0.045
1213	940	0.21
1280	1007	0.42
1363	1090	1.00
1400	1127	2.69

Vergleicht man die aus diesen Dissociationswärmen berechnete Zahl für den unmittelbaren Uebergang von Dioxyd in Oxyduloxyd mit dem kalorimetrischen Wert Le Chateliers[1]), so findet man, wie beim Antimon, eine beträchtliche Abweichung: 35.8 gegen 48.0 Cal. Wir bevorzugen die einwandfreien direkten Messungen Meyers und Rötgers gegenüber der Rechnung mit der kalorimetrischen Zahl, die zu wesentlich höher gelegenen Wertigkeitsgrenzen führen würde.

c) Uebergang von Manganoxyduloxyd in Manganoxydul.

$2\,Mn_3O_4 = 6\,MnO + O_2 - 111$ Cal. (Le Chatelier)

T	t	p
2440°	2167°	0.06
2540	2267	0.16
2700	2427	0.63
2830	2557	1.82

d) Zerfall von Manganoxydul in die Elemente

$2\,MnO = 2\,Mn + O_2 - 181.6$ Cal. (Le Chatelier).

T	t	p
3800°	3527°	0.04
4000	3727	0.15
4300	4027	0.83
4500	4227	2.29

1) Compt. Rend. 122, 80 [1896].

Zur Zeichnung der Valenzisobaren stellen wir die Gleichgewichtstemperaturen für den Sauerstoffdruck einer Atmosphäre[1]) zusammen, die durch Interpolation aus den nach den mitgeteilten Daten gezeichneten Wertigkeitsgrenzen ermittelt wurden.

	T	t
PtO_2/PtO	703°	430°
PtO/Pt	828	555
PdO_2/PdO	453	180
PdO/Pd	1148	875
CuO/Cu_2O	1383	1110
Cu_2O/Cu	2073	1800
Tl_2O_3/Tl_2O	1148	875
Tl_2O/Tl	2138	1865
PbO_2/Pb_3O_4	663	390
Pb_3O_4/PbO	888	615
PbO/Pb	2513	2240
Sb_2O_5/Sb_2O_4	723	450
Sb_2O_4/Sb_2O_3	1333	1060
Sb_2O_3/Sb	2763	2490
Co_2O_3/CoO	1168	895
CoO/Co	3133	2860
Fe_2O_3/Fe_3O_4	2243	1970
Fe_3O_4/Fe	3298	3025
MnO_2/Mn_2O_3	843	570
Mn_2O_3/Mn_3O_4	1363	1090
Mn_3O_4/MnO	2773	2500
MnO/Mn	4323	4050

Die Anordnung nach steigender Zersetzungstemperatur des niedrigsten Oxyds ist zugleich die absteigende Ordnung für den Edelmetallcharakter. Eine Kontrolle für die Reihenfolge unserer Zahlen hat man in der Spannungsreihe, die ja die entsprechende Anordnung aufweisen muß. Nimmt man noch Silber mit der Reduktionstemperatur $T = 488°$; $p = 1.0$ und Quecksilber mit der

1) Nimmt man statt $p = 1$ z. B. $p = 0.21$, so ändert sich im folgenden Vergleich nichts wesentliches.

mittleren Reduktionstemperatur $T = 723^{0}$; $p = 1.0$[1]) hinzu, so ergibt sich, abgesehen vom Thallium, eine übereinstimmende Folge.

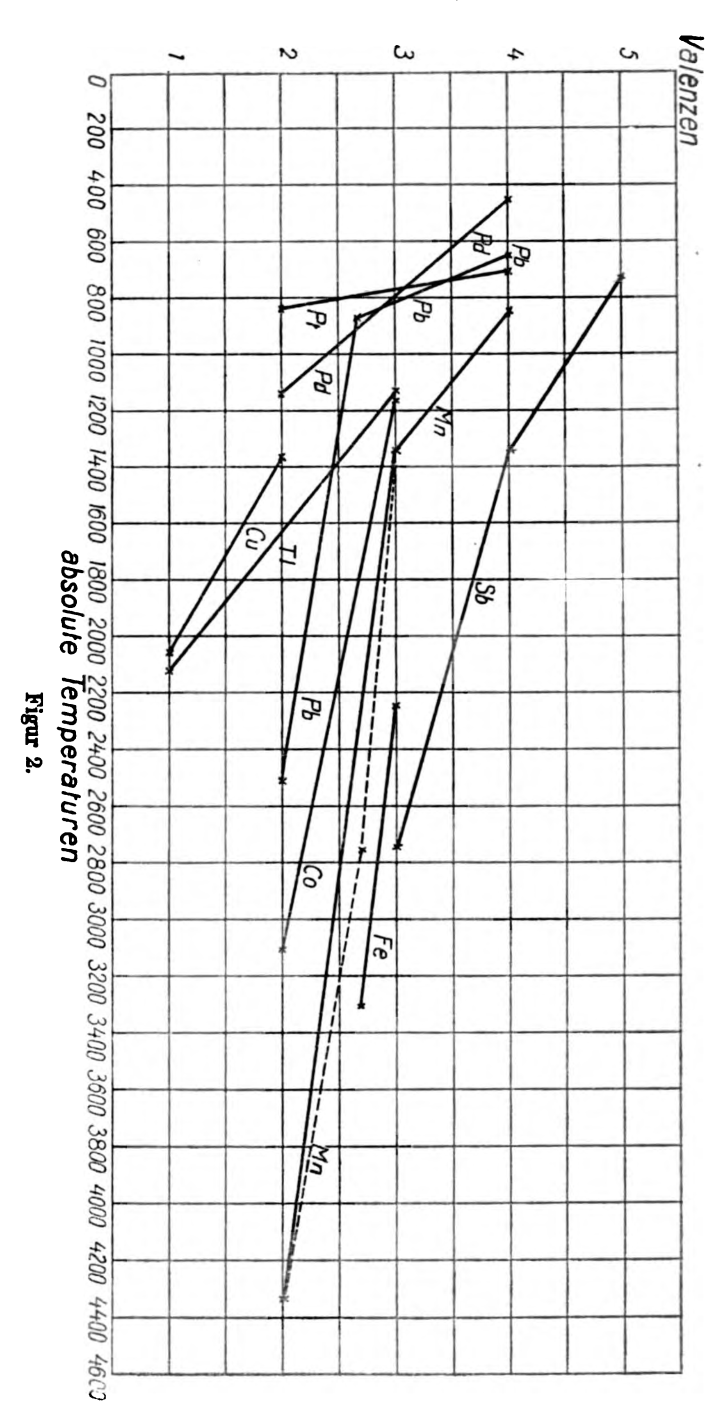
	T	ε Volt
Ag	488°	−0.771
Hg	723	−0.753
Cu	2073	−0.329
Tl	2138	+0.322
Pb	2513	+0.151
Co	3133	+0.232
Fe	3298	+0.344
Co	4323	+1.075

In der Kurventafel der Valenzisobaren (S. 314) sind die absoluten Temperaturen der vorletzten Tabelle als Abscissen gewählt. Als Ordinaten dienen die Valenzen, und zwar in dem Sinne, daß rechts neben den Temperatur-Valenzpunkten immer diejenige Wertigkeitsform unbeständig ist, die durch die links an der Ordinatenaxe abzulesende Zahl bezeichnet ist. Links des Punktes 4/453 ist also Palladium vierwertig, rechts davon nicht mehr; rechts von dem Punkte 2/1148 ist Palladium nicht mehr zweiwertig; rechts von 3/1363 ist Mangan nicht mehr dreiwertig u. s. f. Naturwissenschaftlichen Sinn haben auf diesen Kurven also nur die Punkte, in welchem jene die einer möglichen Wertigkeit entsprechende Horizontale schneiden.

Allen betrachteten Elementen ist gemeinsam, daß ihre Valenz mit steigender Temperatur fällt.

Betrachtet man den Verlauf einer einzelnen Isobare eines Elementes mit mehr als zwei Wertigkeitsmöglichkeiten (Mangan oder Antimon oder Blei), so fällt auf, daß die Neigung der Linie um so stärker wird, je gesättigter die Verbindung ist und je weiter sich die Kurve also dem Temperaturnullpunkt nähert. Die Temperaturdifferenzen, welche die Existenzgebiete höherer Oxyde bezeichnen, sind kleiner als die bei den niederen Oxyden. Wenn man berücksichtigt, daß nach der Gleichung für die Berechnung vergleichbarer Affinitäten: $A = -RT \ln p$ für gleiche Druckwerte die Zersetzungstemperatur eine der Affinität proportionale Größe ist, so bedeutet die Verkleinerung der Existenzgebiete mit wachsender Absättigung des Metalls eine abnehmende Affinität des Metallatoms zum Sauerstoff. Je weiter die Oxydation von ihrem Endziele — Ueberführung des Metalls in die höchste Oxydations-

1) Berechnet nach Pélabon, Compt. Rend. **128**, 825 [1899].


Valenzen
1
2
3
4
5
absolute Temperaturen
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
2800
3000
3200
3400
3600
3800
4000
4200
4400
Pd
Pb
Pt
Pb
Pd
Mn
Cu
Tl
Sb
Pb
Co
Fe
Mn

Figur 2.

stufe — entfernt ist, desto größer ist die Affinität des Vorganges. Ein solcher Schluß ist bereits mehrfach[1]) u. a. auch auf Grund der Wärmetönungen selbst[2]) gezogen worden, soweit man jene als exaktes Maß der Affinät ansehen konnte, und er korrespondiert mit den Erfahrungen über den Dissoziationsgrad der Wasserstoffionen mehrwertiger Säuren[1]).

Vergleicht man aber die Valenzisobaren sämtlicher untersuchter Elemente, so scheint dieses Ergebnis einer bemerkenswerten Verallgemeinerung fähig: **Unabhängig von der Natur des Metalles und unabhängig von dem Betrage seiner Valenz wird die Neigung der Valenzisobare stärker, je niedriger die Temperatur ist.** Aus der Nebeneinanderstellung der absoluten Temperaturen und der Tangenten der Neigungswinkel ergibt sich, daß diese im allgemeinen mit abnehmender Temperatur wachsen. Neben den Temperaturen stehen die Bezeichnungen der zugehörigen Isobaren geklammert[3]).

T		tgα	T		tgα
4323°	(Mn)	0.135	2073	(Cu)	0.588
3298	(Fe)	0.128	1363	(Mn)	0.769
3133	(Co)	0.204	1333	(Sb)	0.667
2763	(Sb)	0.274	1148	(Pd)	1.11
2513	(Pb)	0.161	888	(Pb)	2.69
2138	(Tl)	0.833	828	(Pt)	6.69

Freilich zeigen sich eine ganze Anzahl kleinerer Abweichungen — es wäre wegen der Unvollkommenheit der Unterlagen selbst bei exakter Gültigkeit unserer Regel merkwürdig, wenn es nicht so wäre — und Thallium, dieses vielseitig wandelbare Element, fällt ganz heraus[4]); aber statistisch genommen, gehört zu den niederen

1) Abegg, Versuch einer Theorie der Valenz und der Molekularverbindungen. Christiania, Videnskabsselskabets Skrifter I. Mathem.-naturw. Kl. 1902 No. 12.

2) Thomsen, Thermochemische Untersuchungen III, 525 [1883]. Berthelot, Thermochimie I, 214 [1897].

3) Für Mangan ist die Valenzisobare zwischen dem Aufhören der Dreiwertigkeit und dem Beginne der Nullwertigkeit gewählt und die gestrichelt gezeichnete Linie, die über das Oxyduloxyd führt, übergangen. Die Unregelmäßigkeit, die durch die Berücksichtigung des Oxyduloxyds in die Kurve kommen würde, ist wahrscheinlich fehlerhaft und dadurch bedingt, daß für die höheren Valenzen experimentell ermittelte Zersetzungstemperaturen benutzt werden konnten, während für die niederen die Temperaturen aus den Dissoziationswärmen berechnet werden mußten, obwohl sich schon bei jenen Differenzen von Rechnung und Versuch gezeigt hatten.

4) Die Anomalie beim Thallium würde verkleinert, wenn ein den Thallo Thallisalzen entsprechendes Zwischenoxyd gefunden würde.

Temperaturen eine größere Neigung der Isobare und umgekehrt. Ausnahmslos liegen für Temperaturen bis 1200° die Tangenten über 1; bei 1200—2200° zwischen 1 und 0.5 und bei Temperaturen darüber zwischen 0.3 und 0.1.

Besonders auffällig ist, daß die absolute Größe der Wertigkeit keine wesentliche Rolle spielt. Für zwei Elemente, von denen das eine fünf- und dreiwertig, das andere zwei- und einwertig ist, würde die gleiche Neigung der Valenzisobare resultieren, wenn sich das Sesquioxyd der ersten und das Monoxyd der zweiten bei gleicher Temperatur reduzieren ließen (vgl. die Sb- und die Mn-Kurve bei 1350°). Vielmehr kommt es auf den Betrag der Valenzänderung an. Je höher die Temperatur, desto weniger schroff ist der Valenzwechsel. Ein unmittelbarer Valenzabfall von 4 auf 2 wird im allgemeinen bei höherer Temperatur nicht zu finden sein, wohl aber Aenderungen von 4 auf 3, von 3 auf 2. Schroffe Valenzwechsel bei hohen Temperaturen würden, wenn sich die Isobare unserer Regel fügen sollte, äußerst verschiedene Affinitäten pro Valenzeinheit bedingen, wie sie bei den untersuchten Metallen sich nicht finden.

Außer diesen Oxyden gibt es noch zwei anscheinend kleinere Klassen von Oxyden, die der Regel nicht folgen.

Zur ersten Klasse gehören die Oxyde, die endotherm aus den höheren Oxyden und Metall entstehen. Ein Beispiel ist das Iridiumsesquioxyd, das nach L. Wöhler bei 400° in Iridiumoxyd und Iridiummetall zerfällt [1]). Da diese Temperatur in das Existenzgebiet des Iridiumdioxyds gehört, so kann man die Wärme-Entwicklung bei jener Reaktion unter der experimentell begründeten Annahme berechnen, daß das Primäre des Vorganges der Zerfall des Sesquioxyds in die Elemente ist, aus denen sich das Dioxyd z. T. zurückbildet. Die Dissoziation des Iridiumsesquioxyds wurde in einer Kohlendioxydatmosphäre beobachtet, der Sauerstoffdruck war also auch während der sauerstoffliefernden Reaktion klein. Für $p = 0.01 - 0.001$ berechnet sich sich $Q = 30 - 33$ Cal. Wenn wir schätzungsweise $Q = 30$ Cal. setzen und mit der Dissoziationswärme des Iridiumdioxyds kombinieren, so ergibt sich:

$$2\,Ir_2O_3 = 4\,Ir + 3\,O_2 - 90 \text{ Cal.}$$
$$3\,IrO_2 = 3\,Ir + 3\,O_2 - 150 \text{ Cal.}$$
$$2\,Ir_2O_3 = 3\,IrO_2 + Ir + 60 \text{ Cal.}$$

1) Z. f. anorg. Chem. 57, 336 [1908].

Wir wollen lediglich Wert auf das positive Vorzeichen der Wärmemenge legen und sehen also, daß hinsichtlich seiner Bildung aus Iridium und Iridiumdioxyd das Sesquioxyd endotherm ist.

Zur zweiten Klasse gehören einige niedere Oxyde, deren Wärmetönung beim Uebergange in das höhere Oxyd und Metall nahezu Null ist und deren Wertigkeitsgrenzen gegenüber dem Gebiete der unverbundenen Elemente mit denjenigen gegenüber den höheren Oxyden nahezu oder völlig zusammenfallen. Nach Delépine und Hallopeau[1]) dissozieren die Wolframoxyde mit folgendem Wärmeverbrauch:

$$^2/_3 WoO_3 = {}^2/_3 Wo + O_2 - 130.8 \text{ Cal.}$$
$$2 WoO_3 = 2 WoO_2 + O_2 - 129.8 \text{ Cal.}$$
$$WoO_2 = Wo + O_2 - 131.4 \text{ Cal.}$$

Aus der Gleichheit der Dissoziationswärmen folgt nach Nernst die Gleichheit der Dissoziationstemperaturen. Man kann also Wolframtrioxyd nicht ohne Vorsichtsmaßregeln durch systematisches Reduzieren zu Dioxyd abbauen, denn dieses besitzt neben Sauerstoff gleichen Druckes kein eigentliches Gebiet stabiler Existenz, sondern man muß die Reaktionsgeschwindigkeit so einrichten, daß man den Versuch unterbrechen kann, wenn die dem Dioxyd entsprechende Gewichts- oder Farbänderung eingetreten ist. Diese Arbeitsvorschrift von Berzelius entspricht jener thermochemischen Folgerung. Offenbar liegen die Verhältnisse beim Molybdän ganz gleich, bei welchem ein unvorsichtiges Fortsetzen der Reduktion von Trioxyd unmittelbar zu Metall führt.

Ein drittes Beispiel bietet das Zinn.

$$2 SnO_2 = 2 SnO + O_2 - 131 \text{ Cal.}$$
$$2 SnO = 2 Sn + O_2 - 136 \text{ Cal.}$$

Die Wärmemengen weichen prozentual so wenig von einander ab, daß es verständlich wird, warum man das Zinnoxydul als stabile Zwischenstufe weder bei der Oxydation des Zinns noch bei der Reduktion des Zinndioxyds erhält.

---

1) Compt. Rend. **129**, 600 [1899].

Clausthal i. H., Oktober 1908.



Zur Kinetik des Dissoziationsgleichgewichtes und der Reaktionsgeschwindigkeit.

Von

F. Krüger.

Vorgelegt durch Herrn Voigt in der Sitzung am 19. Dezember 1908.

Eine kinetische Theorie der Dissoziation wurde zuerst von Boltzmann[1]) entwickelt. Es gelang ihm, die Gleichungen, welche die Abhängigkeit der Dissoziation der Gase vom Druck und von der Temperatur darstellen, die sog. Reaktionsisotherme und die Reaktionsisochore auf Grund kinetischer Vorstellungen abzuleiten, indem er die Wahrscheinlichkeit dafür berechnete, daß sich ein Atom oder Molekül in der sog. Wirkungssphäre eines anderen Atoms oder Moleküls, mit dem zusammen es eine Verbindung eingeht, befindet und nicht in dem von Wirkungssphären freien Raume, d. h. also dafür, ob es chemisch gebunden oder frei ist.

Das Gleichgewicht zwischen gebundenen und ungebundenen Atomen oder Molekülen wird hier gewissermaßen als ein statisches behandelt; nach Boltzmann[2]) ist „der Hauptvorzug seiner allgemeinen Formel gerade der, daß sie die Anzahl der chemisch gebundenen Atompaare zu berechnen gestattet, ohne daß man speziell auf den Vorgang der Entstehung oder Wiederauflösung derselben einzugehen braucht". Nach Analogie des Gleichgewichtes zwischen Flüssigkeit und ihrem Dampf haben wir aber auch hier einen solchen beständigen kinetischen Austausch anzunehmen. Ist der Zustand vom Gleichgewicht entfernt, so gibt die Formulierung dieses Vorganges der Reaktion die bekannten Gleichungen der Reaktionsgeschwindigkeit. Diese Formulierung gelingt bekanntlich[3])

1) Boltzmann, Vorles. über Gastheorie, II, p. 177—217. Leipzig 1898.

2) Vorles. über Gastheorie, II, p. 186. Leipzig 1898.

3) Vergl. z. B. Nernst, Theoret. Chemie. Stuttgart. 6. Aufl. 1908.

leicht dadurch, daß man die Geschwindigkeit der Reaktion in eine Richtung der Anzahl der Zusammenstöße der reagierenden Moleküle proportional setzt, die wiederum dem Produkt der ersten oder einer höheren Potenz der Konzentrationen der reagierenden Moleküle proportional sind. Erhielt man so leicht die Gesetze der Reaktionskinetik für eine konstante Temperatur, so gelang es jedoch bisher nicht — erst ganz neuerdings liegt ein weiter unten zu besprechender Versuch vor —, die Erfahrungstatsache kinetisch zu deuten, daß der Temperaturkoeffizient chemischer Reaktionen eine abnorme Größe besitzt: Bei den meisten Reaktionen steigt die Geschwindigkeit bei einer Temperatursteigerung von 10° auf das Zwei- bis Dreifache. Diese Größe ist nicht zu erklären aus der Zunahme der Anzahl der Zusammenstöße mit der Temperatur, denn diese Anzahl ist nur der Quadratwurzel aus der Temperatur proportional.

Nun ist zwar weiterhin die kinetische Theorie der Dissoziation einerseits von L. Natanson[1]), andererseits von G. Jäger[2]) unter Berechnung der in der Zeiteinheit sich bildenden und zerfallenden Moleküle weiter entwickelt; allein in diesen Theorieen, von denen noch weiter unten die Rede sein wird, wird das genannte Problem nicht behandelt.

Erst neuerdings hat H. Goldschmidt[3]) eine kinetische Ableitung des Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit zu geben gesucht unter Zugrundelegung folgender Hypothese:

Die Geschwindigkeit einer Umlagerungsreaktion in einem idealen Gase erscheint in erster Annäherung bestimmt durch die Anzahl jener Moleküle, deren Geschwindigkeit einen bestimmten — extrem hohen — Minimalwert erreicht oder übersteigt. — Die Geschwindigkeit wird einfach dieser Anzahl proportional gesetzt. Diese Annahme kommt der Grundlage der Jägerschen Berechnung der Anzahl der zerfallenen Moleküle sehr nahe, unterscheidet sich jedoch wesentlich dadurch von ihr, daß in ihr die Geschwindigkeit des Zerfalls für all diese Moleküle mit sehr verschiedenen Geschwindigkeiten als gleich angenommen wird, eine Annahme, die starken Bedenken unterliegt. Als eine exakt kinetische Theorie dürfte diese Arbeit daher wohl kaum aufzufassen sein.

1) L. Natanson, Wied. Ann. **38**, p. 288. 1889.

2) G. Jäger, Wiener Ber. **100**, p. 1182. 1891. **104**, p. 671. 1895.

3) H. Goldschmidt, Dissertation, Breslau 1907; ich lernte diese Arbeit erst nach Abschluß meiner Arbeit durch freundlichen Hinweis des Herrn Dr. v. Wartenberg in Berlin kennen.

Im Folgenden soll eine kinetische Theorie der Dissoziation entwickelt werden, die in enger Analogie steht zu der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten, wie sie in neuerer Zeit von Kamerlingh-Onnes[1]), Voigt[2]), G. Jäger[3]) und Dieterici[4]) gegeben ist; sie wird zu einer einfachen Deutung der Größe des Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit führen.

Wir betrachten folgende Dissoziation im gasförmigen Zustande

$$AB = A + B;$$

die Anzahl der Moleküle AB in der Volumeinheit sei gleich N_0, die der Atome A gleich N_1 und die der Atome B gleich N_2.

Ueber den Vorgang der Dissoziation machen wir nun folgende Annahmen: Jedes Atom A habe eine kugelförmige Wirkungssphäre um seinen Mittelpunkt herum vom Radius ϱ; befindet sich der Mittelpunkt eines Atoms B innerhalb dieser Sphäre, so bildet A mit B die Verbindung AB. Innerhalb dieser Wirkungssphäre wird sich das Atom B mehr oder minder frei bewegen. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung des Atoms B innerhalb der Wirkungssphäre wird in verschiedenen AB-Molekülen verschieden sein und abhängen vor allem von der Intensität des letzten Zusammenstoßes, den das betreffende Molekül erfahren hat. In der Grenzfläche der Wirkungssphäre mögen anziehende Kräfte wirksam sein, die das Herausfliegen eines Atoms B aus dem Molekularverbande in A im allgemeinen verhindern, nur wenn die Geschwindigkeit von B einen gewissen Schwellenwert c überschreitet, wird das Atom B diese anziehende Kraft überwinden und aus der Wirkungssphäre herausfliegen können; immer dann tritt also ein Zerfall des Moleküls AB ein.

Um also angeben zu können, wie viele Moleküle AB von einer gegebenen Anzahl N_0 derselben in der Zeiteinheit zerfallen, wird es nötig sein, darüber eine Annahme zu machen, welcher Art diese intramolekulare Bewegung eines Atoms B innerhalb der Wirkungssphäre von A ist und besonders, wie sich die verschiedenen Geschwindigkeiten der Atome B in den verschiedenen Molekülen AB auf diese Atome B verteilen. Eine solche Annahme kann bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis von den molekularen

---

1) Kamerlingh-Onnes, Archiv. Néerland. **30**, p. 101. 1896.
2) Voigt, Göttinger Nachrichten 1896, p. 344. 1897, p. 19 u. 261.
3) G. Jäger, Wiener Ber. **99**, p. 679, 860, 1028. 1890/91; **101**, p. 920. 1892.
4) Dieterici, Wied. Ann. **66**, p. 826. 1898.

Kräften nicht ohne Willkür sein. Eine Einschränkung derselben ist jedoch dadurch gegeben, daß eine solche Annahme eine Aussage über die spezifische Wärme unseres zweiatomigen Moleküls einschließt.

Die spezifische Wärme der Gase ist mehrfach der Berechnung auf Grund kinetischer Theorieen unterworfen worden. Für unseren speziellen Fall eines zweiatomigen Gases sind besonders zwei Theorieen aufgestellt, die zu zwei verschiedenen Werten der spezifischen Wärmen zweiatomiger Gase führen, die beide in der Natur vorkommen. Die erste ist zuerst von Maxwell[1]) aufgestellt, sie setzt voraus, daß die Verbindung der Atome im Molekül eine solche sei, daß diese, ohne ihre Verbindung zu lösen, doch vollkommen frei beweglich seien; d. h. daß ein Atom an der Grenze der Wirkungssphäre zurückgehalten wird, sich aber im übrigen frei innerhalb derselben bewegt. Diese Annahme, die unabhängig auch von Boltzmann[2]) seinen Berechnungen zu Grunde gelegt wurde, führt zu dem Werte von 1,333 für das Verhältnis $\varkappa$ der spezifischen Wärmen dieser Gase bei konstantem Druck und konstantem Volumen. Dieser Wert findet sich experimentell nahe erfüllt bei Cl_2, Br_2, J_2, ClJ und BrJ. Alle anderen zweiatomigen Gase dagegen geben bekanntlich den Wert 1,4. Diesen Wert — und das ist die zweite der oben erwähnten Theorie — findet Boltzmann[3]) unter der Annahme, daß die Verbindung der beiden Atome im Molekül eine starre ist, daß jedem Freiheitsgrade derselbe Beitrag an kinetischer Energie zukommt, und indem er hier 5 Freiheitsgrade annimmt, da die Lage eines Molekül durch die 3 Koordinaten ihres Schwerpunktes und durch 2 Winkel, welche die Richtung der Verbindungslinie beider Atome bestimmen, vollständig gegeben sei. Gegen die Annahme von 5 Freiheitsgraden in diesem Fall sind freilich Bedenken geltend gemacht, vor allem daß ein Rotationskörper nicht nur um seine Symmetrieaxe, sondern auch um andere gegen sie senkrechte Axen rotieren kann. Nun würde man den Wert 1,4 aber auch finden unter folgender Annahme: Die Wirkungssphäre auch des zweiatomigen Moleküls ist noch hinreichend angenähert eine Kugel, daß der Betrag an Rotationsenergie nicht merklich in Betracht kommt, ebensowenig, wie man das für ein einatomiges Gas annimmt; im Molekül können Schwingungen nur in einer Richtung

---

1) Maxwell, Philos. Mag. IV. Ser. T. XX. 1860. Journal of the chemical society 2. series vol. XIII, p. 504. 1875.

2) Boltzmann, Wiener Ber., mat.-naturw. Kl. 53, p. 195. 1866.

3) Boltzmann, Vorles. über Gastheorie, Bd. II, p. 129. Leipzig 1898.

stattfinden, ist also nur eine Bewegungsfreiheit vorhanden. Der potentiellen Energie der pendelartig angenommenen Bewegung entspricht ein gleicher Betrag an nötiger Wärmezufuhr[1]), sie ist also einer zweiten Bewegungsfreiheit äquivalent, hinzukommen die drei der fortschreitenden Energie des Moleküls entsprechenden, das gibt zusammen 5, führt also auch zu dem Werte 1,4 des Verhältnisses der spezif. Wärme. Diese Deutung würde wohl leichter mit der Tatsache vereinbar sein, daß die Verhältnisse der spezifischen Wärmen der Gase, deren spezif. Wärmen sich mit der Temperatur ändern, sich derjenigen nähern, welche sich bei Annahme freier Beweglichkeit der Atome ergibt; dies wäre dann einfach so zu deuten, daß durch mit der Temperatur steigende Disgregation der Atome im Molekül die richtende Kraft, welche nur Schwingungen in einer Richtung ermöglicht, in ihrer Wirkung kleiner und kleiner wird, bis freie Beweglichkeit der Atome im Molekül resultiert. Aus der Boltzmannschen Deutung scheint dieser Temperatureinfluß schwerer zu folgen. Die interessante, schon von Wüllner[2]) aufgeworfene Frage, ob alle zweiatomigen Gase mit steigender Temperatur den Wert erreichen, der freier Beweglichkeit entspricht, ist freilich noch eine offene; doch zeigen die neueren Bestimmungen[3]) der spezif. Wärmen der Gase, daß mit steigender Temperatur durchgehends eine Aenderung in diesem Sinne eintritt. Versuche bei extrem hohen Temperaturen, z. B. Explosionsversuche, würden vielleicht diese Frage jetzt schon entscheiden lassen. Die vorläufige Annahme, daß mit steigender Temperatur der Wert 1,33 erreicht werde, erscheint so jedenfalls als berechtigt. Die Temperatur, bei der dies eintritt, wird für verschiedene Gase verschieden sein; jedenfalls aber wird der Wert erreicht sein, wenn eine merkliche Dissoziation des Gases beginnt. Da für uns gerade dies Temperaturgebiet der beträchtlichen Dissoziation in Frage kommt, soll daher hier die Annahme gemacht werden, daß die Atome im Molekül volle Bewegungsfreiheit besitzen. Selbst wenn man das nicht zugibt, bleibt die Theorie immer noch gültig für die Gase, die den Wert 1,33 für $\varkappa$ ergeben.

Um die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Moleküle zu bestimmen, kommt es nun darauf an, zu wissen, nach welchem

---

1) Vergl. Boltzmann, Wiener Ber., math.-naturw. Kl. **56**, S. 686. 1867. Richarz, Wied. Ann. **48**, p. 708. 1893; Staigmüller, Wied. Ann. **65**, p. 670. 1898.

2) Wüllner, Experimentalphysik. Bd. III, p. 603. IV. Aufl. Leipzig 1885.

3) Vergleiche F. Haber, Thermodynamik technischer Gasreaktionen. München und Berlin 1905.

Gesetz die Geschwindigkeit der Atome B in der Wirkungssphäre der Atome A aller Moleküle verteilt ist. Wohlgemerkt, handelt es sich hier um die Relativgeschwindigkeit eines Atoms B in bezug auf die Wirkungssphäre von A. Ob letztere also ruht oder sich bewegt, ist gleichgültig für den Vorgang im Molekül, speziell für den Zerfall desselben. Letzterer wird immer dann eintreten, wenn diese Relativgeschwindigkeit den Grenzwert c überschreitet. Ist also die Ruhe oder Bewegung der Wirkungssphäre der Moleküle AB für den Zerfall gleichgültig, so ist die Anzahl der in der Zeiteinheit in die Wirkungssphäre der Atome A hineinfliegenden Atome B, also die Anzahl der in der Zeiteinheit sich bildenden Moleküle, von der Geschwindigkeit der Wirkungssphären der Atome A abhängig und zu berücksichtigen. Da, wie weiter unten gezeigt wird, alle Zusammenstöße als molekülbildend anzusehen sind, geschieht dies einfach dadurch, daß die Anzahl aller Zusammenstöße, bei denen ja die gegenseitige Geschwindigkeit der A- und B-Atome berücksichtigt ist, in Rechnung gesetzt wird. Fände keine Dissoziation statt, so wäre die Annahme, daß auch für die Atomgeschwindigkeiten innerhalb des Molekularverbandes das Maxwellsche Verteilungsgesetz gilt, wenn wir die Geschwindigkeiten der einzelnen B-Atome in sehr vielen Molekülen betrachten, schon deshalb wahrscheinlich, da ja die progressiven Geschwindigkeiten der Moleküle jenem Gesetz gehorchen und eine Proportionalität der äußeren mit der inneren Geschwindigkeit nahe liegt. Dadurch, daß jedoch entsprechend unserer obigen Annahme stets ein Zerfall des Moleküls stattfindet, wenn die Geschwindigkeit des Atoms B einen gewissen Grenzwert überschreitet, scheint diese Annahme zunächst doch zweifelhaft und O. E. Meyer[1]) sucht dafür die Existenz eines anderen Verteilungsgesetzes abzuleiten. Ein solcher Einwand hätte jedoch nur dann volle Berechtigung, wenn der Zerfall unendlich schnell, momentan erfolgte, dann könnten in der Tat Moleküle, in denen die Atome B eine Geschwindigkeit größer als den oben definierten Schwellenwert c besäßen, nicht vorkommen. Zwar besitzen Moleküle, in denen B größere Geschwindigkeit als c hat, gegenüber den anderen Molekülen insofern eine beschränktere Lebensdauer, als sie nicht nur durch Zusammenstoß ihre innere und äußere kinetische Energie ändern, sondern schon vorher zerfallen können (nicht unbedingt brauchen). Diese Verminderung der Anzahl der Moleküle mit

---

1) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. II. Aufl. Breslau 1899, Math. Zusätze, p. 49.

größeren Geschwindigkeiten der B-Atome gegenüber der dem Maxwellschen Verteilungsgesetz entsprechenden durch Zerfall kann jedoch kompensiert werden dadurch, daß sich beim Zusammenstoß eines A- und B-Atoms entsprechend mehr Moleküle mit größeren Geschwindigkeiten bilden Der Fall hier ist ganz analog dem Vorgang in der Grenzfläche Flüssigkeit und Dampf nach der oben erwähnten Theorie; hier werden alle Flüssigkeitsmoleküle, deren Geschwindigkeit einen gewissen Schwellenwert überschreitet, herausfliegen in den Dampfraum und es hat danach den Anschein, als ob in dieser Grenzschicht eine Verarmung an schnelleren Molekülen und somit eine Abweichung vom Maxwellschen Verteilungsgesetz dort stattfände. Daß dies trotzdem nicht der Fall ist, liegt, wie Voigt[1]) gezeigt hat, daran, daß wenn $f_i(u)$ das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz für die Moleküle in der Flüssigkeit bedeutet, die Anzahl der in der Zeiteinheit die Grenzfläche erreichenden und austretenden Moleküle gegeben ist nicht durch $f_i(u)\,du$, sondern durch $u f_i(u)\,du$, und daß entsprechend die Anzahl der in die Flüssigkeit hereinfliegenden gleich $u_a f_a(u_a)\,du_a$ ist, wenn $f_a(u_a)$ das Verteilungsgesetz in der Dampfphase bedeutet. Die für das Gleichgewicht nötige Bedingung

$$u f_i(u)\,du = u_a f_a(u_a)\,du_a$$

erweist sich aber unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Geschwindigkeit der herausfliegenden Moleküle einen Schwellenwert c überschreiten muß, die Moleküle an ihrer Geschwindigkeit infolgedessen Einbuße erleiden, sodaß $u_a^2 = u^2 - c^2$, als identisch erfüllt, wenn man für $f_i(u)$ und $f_a(u_a)$ das Maxwellsche Verteilungsgesetz einführt, wobei nur $f_i(u)$ sich durch den Faktor $e^{-\frac{c^2}{u^2}}$ von $f_a(u_a)$ unterscheidet. Der physikalische Grund für die Aufrechterhaltung des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes in der Grenzschicht dürfte darin bestehen, daß zwar die schnellen Moleküle fort und fort herausfliegen, dafür aber auch die hereinfliegenden langsamen Moleküle in der Grenzschicht um denselben Betrag an Geschwindigkeit zu- wie die herausfliegenden abnehmen. Die Verhältnisse beim Dissoziationsgleichgewicht sind ganz die analogen, da auch hier die aus der Wirkungssphäre herausfliegenden Atome denselben Betrag an Geschwindigkeit einbüßen, den die hereinfliegenden gewinnen. Die Annahme der Gültigkeit des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes ist

1) Voigt, Göttinger Nachrichten 1896, p. 341.

übrigens auch implicite enthalten in Boltzmanns kinetischer Theorie der Dissoziation, indem dort das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atom innerhalb der Wirkungssphäre, zu der, daß es in dem von Wirkungssphären freien Raum sich befindet, als durch das Verhältnis der entsprechenden Volumina gegeben angesehen wird, multipliziert mit $e^{2h\chi}$, worin χ die Dissoziationsarbeit bedeutet und $h = \frac{3}{2mv^2}$ (v^2 = mittleres Geschwindigkeitsquadrat) ist. Diese Boltzmannsche Erweiterung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes gibt also die Anzahl N der Moleküle, deren Geschwindigkeiten zwischen u und $u + du$ liegen, in einem Raum, an dessen Grenze Kräfte mit dem Potential χ wirken, sie hat die Form

$$N = \frac{N_0}{\alpha\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(u^2 + 2\chi\right)} du,$$

worin $\alpha^2 = \frac{2v^2}{3}$ (v^2 = mittleres Geschwindigkeitsquadrat) und N_0 die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit in dem von Kräften freien Raum bedeutet. Dieses Gesetz gilt auch für beliebig kleine Kraftfelder [1]), wie sie hier unsere Wirkungssphären der Moleküle darstellen, wenn nur in diesen Kraftfeldern Zusammenstöße nicht ausgeschlossen sind. Solche Zusammenstöße finden aber auch in unserem Falle zwischen den hereinfliegenden Atomen A und dem im Mittelpunkte der Wirkungssphäre befindlichen Moleküle B statt und bewirken hier einen Austausch zwischen intramolekularer und äußerer, molekularer Bewegung.

Diese Frage nach der Gültigkeit des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes für die molekularen Geschwindigkeiten eines im Dissoziationsgleichgewicht befindlichen Moleküls hängt offenbar aufs engste mit der weiteren zusammen, ob jeder Zusammenstoß der Atome A und B oder richtiger jedes Hereinfliegen eines Atoms B in die Wirkungssphäre eines Atoms A als die Bildung eines Moleküls aufzufassen ist oder ob diese Bildung an die Bedingung unterer Grenzwerte für die Geschwindigkeiten der zusammenfliegenden Atome gebunden ist. Die Boltzmannsche kinetische Theorie der Dissoziation enthält implicite die Entscheidung für die erstere Annahme. Aus anderen Gründen stellt sich Natanson (loc. cit) auf denselben Standpunkt. Nur G. Jäger (l. c.)

1) Vergl. G. Jäger, Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie, Heft 12 der Sammlung „Die Wissenschaft“, Braunschweig 1906.

führt die zweite Annahme in seine Rechnungen ein. Nun müssen wir aber offenbar, wenn wir die Moleküle, in denen die Geschwindigkeit des Atoms B den Grenzwert c überschreitet, als zerfallend in die Rechnung einführen, offenbar auch bei der Bildung diejenigen mitrechnen, in denen die Geschwindigkeit von B den Schwellenwert c überschreitet. Ob die c überschreitende Geschwindigkeit von B entstanden ist durch Zusammenstoß des Moleküls AB mit irgend einem anderen Molekül oder Atom oder durch Hereinfliegen von B in die Wirkungssphäre von A ist gleichgültig, die Lebensbedingungen sind in beiden Fällen dieselben; falls nicht vorher ein Zusammenstoß stattfindet, zerfallen beide bei gleicher Geschwindigkeit von B nach derselben Zeit. Die Existenzdauer derjenigen Moleküle, in denen die Geschwindigkeit von B den Grenzwert c überschreitet, ist ja gegenüber den anderen überhaupt eine beschränktere und ihre Anzahl kann nur dadurch auf dem dem Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetz entsprechenden gehalten werden, daß, wie schon erwähnt, auch eine entsprechend größere Anzahl solcher Moleküle beim Zusammenstoß von A und B sich bildet. Die Lebensdauer eines Moleküls, in dem die Geschwindigkeit von B den Schwellenwert c überschreitet, ist nie länger als die Zeit, die zum Durchfliegen der Wirkungssphäre von A notwendig ist, ganz gleichgültig, ob B vorher innerhalb der Sphäre schon mit geringerer Geschwindigkeit sich befand und durch Zusammenstoß des Moleküls AB erst auf den höheren Wert kam, oder ob B gleich beim Hereinfliegen in die Sphäre diesen Wert mitbrachte. Die Annahme Jägers der Notwendigkeit unterer Grenzwerte der Geschwindigkeiten der Atome A und B, falls ihr Zusammenstoß zur Bildung eines beständigen Moleküls führen soll, indem also B eine kleinere Geschwindigkeit als c besitzt, erscheint schon deshalb als unzureichend, da B ja beim Eintreten in die Wirkungssphäre den Geschwindigkeitszuwachs erhält (zum Quadrat seiner Geschwindigkeit addiert sich c^2); selbst wenn also B mit der Geschwindigkeit Null in die Wirkungssphäre von A hineinfliegt, erhält es so die Geschwindigkeit c, die es auch zum Herausfliegen wieder befähigt. Ob es hierbei herausfliegt, ohne mit dem im Mittelpunkt der Wirkungssphäre gedachten Atom A zusammenzustoßen, oder ob es an diesem reflektiert wird, ist hierbei offenbar gleichgültig. Zum Umsatz von Geschwindigkeit des Atoms B in solche fortschreitender Geschwindigkeit des Moleküls AB kann aber natürlich nicht der so erhaltene Geschwindigkeitszuwachs c, der ja nur ein relativer zwischen A und B ist, dienen, sondern nur die Geschwindigkeit, die B vor dem Eintritt

in die Wirkungssphäre schon besaß. Wie klein also immer auch die relative Geschwindigkeit von *A* und *B* vor dem Zusammenstoß sein mag, jeder Zusammenstoß führt zunächst zur Bildung eines Moleküls, in dem *B* mindestens den Schwellenwert *c* der Geschwindigkeit besitzt. Wenn hieraus Moleküle hervorgehen sollen, in denen *B* kleinere Geschwindigkeiten besitzt, so kann das nur so geschehen, daß ein Molekül beim Zusammenstoß mit einem anderen die intramolekulare Geschwindigkeit in *B* erniedrigt und dafür dem gestoßenen Atom oder Molekül einen Zuwachs an kinetischer, letzterem z. T. auch an intramolekularer Energie erteilt. Wesentlich ist hierbei der so entstehende Zuwachs an kinetischer Energie fortschreitender Atom- oder Molekularbewegung, der der bei der Vereinigung der Atome notwendig frei werdenden Dissoziationswärme entspricht, die beim Gleichgewicht die mit dem Molekülzerfall verbundene Dissoziationskälte, den mit dem Herausfliegen von *B* aus der Wirkungssphäre verbundenen Verlust an kinetischer Energie kompensiert. Dies Auftreten der mit der Vereinigung verbundenen Bildungswärme dürfte nur durch den hier geschilderten Mechanismus des primären Entstehens von Molekülen, in denen die Geschwindigkeit von *B* größere Werte als *c* besitzt, erklärbar sein; denn die Zunahme der intramolekularen Geschwindigkeit von *B* infolge der Kräfte in der Grenze der Wirkungssphäre, die auftritt ganz gleich, welches die relative Geschwindigkeit der Atome vor dem Zusammenstoß war, ist es, welche der negativen Wärmetönung der Dissoziation, der Bildungswärme entspricht, und die, wenn sie als solche, d. h. als kinetische Energie fortschreitender Bewegung auftreten soll, dies nur durch den beim Zusammenstoß möglichen Umsatz von intramolekularer in fortschreitende Bewegung leisten kann. Mit der Jägerschen Annahme unterer Grenzwerte der Atome beim Zusammenstoß ist also für die Existenzfähigkeit des entstehenden Moleküls deshalb nichts Wesentliches gewonnen, da auch dann stets die intramolekulare Geschwindigkeit von *B* noch den Schwellenwert *c* überschreitet. Damit fällt aber der Grund für die Einführung solcher unteren Grenzwerte fort, jeder Zusammenstoß ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit der Atome bei demselben als gleichwertig für die Molekülbildung in Rechnung zu setzen. Es ist dann aber leicht ersichtlich, daß, wenn jeder Zusammenstoß zur Bildung eines Moleküls führt, sich für die intramolekulare Geschwindigkeit in analoger Weise die Gültigkeit des Maxwellschen Verteilungsgesetzes erweisen läßt, wie das von Voigt für die Grenzfläche Flüssigkeit—Dampf geschehen ist.

Damit ist die Begründung für die Annahmen gegeben, die der folgenden Rechnung zu Grunde liegen und die nochmals kurz formuliert sein mögen: 1) Das Atom B besitzt innerhalb der Wirkungssphäre von A volle Bewegungsfreiheit. 2) Die Geschwindigkeiten von B in den Molekülen AB sind nach dem Maxwellschen Verteilungsgesetz verteilt. 3) Das Atom B kann aus der Wirkungssphäre von A nur herausfliegen, wenn seine Geschwindigkeit einen bestimmten Schwellenwert c überschreitet. 4) Jeder Zusammenstoß der Atome A und B ist als molekülbildend in Rechnung zu setzen.

Auf Grund dieser Annahme läßt sich nun zunächst die Anzahl der in der Zeiteinheit zerfallenden Moleküle leicht berechnen. Es seien in der Volumeinheit enthalten N_0 Moleküle AB, N_1 Atome A und N_2 Atome B; der Radius der Wirkungssphäre der Atome A sei gleich ϱ. Dann beträgt das Volumen der Wirkungssphären sämtlicher Moleküle AB $\frac{4}{3}\varrho^3 \pi N_0$, in ihm sind im Ganzen N_0-Atome enthalten. Mithin befinden sich in der Volumeinheit der Wirkungssphären der Molekülen AB:

$$\frac{N_0}{\frac{4}{3}\varrho^3 \pi N_0} = \frac{3}{4\varrho^3 \pi} \text{ Atome } B.$$

Die Anzahl derjenigen dieser Atome B, deren gegen ein Flächenelement der Grenze der Wirkungssphäre senkrechte Geschwindigkeit zwischen u und $u + du$ liegt, ist nun nach dem Maxwellschen Verteilungsgesetz gegeben durch

$$\frac{3}{4\varrho^3 \pi} \cdot \sqrt{\frac{km}{\pi}}\, e^{-kmu^2}\, du.$$

Hierin bedeutet m die Masse eines B-Atoms und die Konstante k ist definiert durch die Gleichung $\frac{3}{4k} = \frac{1}{2} m v^2$, worin v^2 = mittleres Geschwindigkeitsquadrat der B Atome. Nach dem Obigen ist dies v^2 innerhalb des Moleküls gleich dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat desselben Atoms im freien Raume. Die gesamte Zahl der Moleküle B mit Geschwindigkeiten zwischen u und $u + du$, welche in der Zeiteinheit auf die Oberflächeneinheit der Wirkungssphären der AB-Moleküle auftrifft, erhalten wir hieraus durch Multiplikation mit u [1]), sie ist also gleich

$$\frac{3}{4\varrho^3 \pi} \sqrt{\frac{km}{\pi}}\, u e^{-kmu^2}\, du.$$

1) Vgl. die oben zitierten Arbeiten von Kamerlingh-Onnes, Voigt usw.

Die gesamte Oberfläche der Wirkungssphären aller Moleküle AB ist gleich $4\pi\varrho^2 N_0$, auf diese Gesamtoberfläche treffen von den genannten B-Atomen in der Zeiteinheit also

$$\frac{3}{4\varrho^3\pi}\cdot 4\pi\varrho^2 N_0\cdot\sqrt{\frac{km}{\pi}}\cdot u e^{-kmu^2}\,du$$

$$=\frac{3N_0}{\varrho}\sqrt{\frac{km}{\pi}}\cdot u e^{-kmu^2}\,du.$$

Herausfliegen aus der Wirkungssphäre können von diesen Atomen nur die, deren Geschwindigkeit größer als c ist, das ist also

$$\nu=\frac{3N_0}{\varrho}\sqrt{\frac{km}{\pi}}\int_c^\infty u\cdot e^{-kmu^2}\,du=\frac{3N_0}{2\varrho\sqrt{km\pi}}\,e^{-kmc^2}.$$

Nun ist nach dem Obigen $k=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{mv^2}$, ferner, wenn p den Druck bedeutet, $\frac{p}{N}=\frac{1}{3}\,mv^2=RT$, wenn mit R die Gaskonstante bezeichnet ist. Also

$$mv^2=3RT$$

und

$$k=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3RT}=\frac{1}{2RT}.$$

Ebenso ergibt sich $\frac{1}{\sqrt{k}}=\sqrt{2R}\cdot\sqrt{T}$, sodaß sich ergibt

$$\nu=\frac{3N_0\sqrt{2R}}{2\varrho\sqrt{m\pi}}\cdot\sqrt{T}\cdot e^{-\frac{\frac{1}{2}mc^2}{RT}}.$$

Die Gesamtheit der in der Zeiteinheit durch das Hereinfliegen der B-Atome in die Wirkungssphären der A-Atome sich bildenden Moleküle wäre in der gleichen Weise zu berechnen: nur unter der Berücksichtigung, daß hier die Grenzen der Geschwindigkeit zwischen 0 und ∞ zu wählen sind, da ja keine Kraft das Hineinfliegen erschwert; dies jedoch nur wenn die B-Atome ruhten. Da sie sich ebenso wie alle anderen Atome und Moleküle in lebhafter Bewegung befinden, so wird die Anzahl der in die Wirkungssphäre hereinfliegenden B-Atome größer sein. Die gesamte Zahl der auftreffenden B-Atome ist aber einfach gegeben durch die Anzahl der Zusammenstöße zwischen den Atomen A und B. Diese ist gleich

$$\nu'=\sqrt{2}\,.\,\pi\varrho^2\,.\,N_1\,.\,N_2\,.\,v$$

oder, da

$$v^2 = \frac{3R}{m} T, \text{ also } v = \sqrt{\frac{3R}{m}} \cdot \sqrt{T},$$

$$\nu' = \sqrt{\frac{6R}{m}} \cdot \pi \cdot \varrho^2 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot \sqrt{T}.$$

Beim Gleichgewicht muß $\nu = \nu'$ sein, also

$$\frac{3N_0\sqrt{2R}}{2\varrho\sqrt{m\pi}} \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{\frac{1}{2}mc^2}{RT}} = \sqrt{\frac{6R}{m}} \cdot \pi \cdot \varrho^2 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot \sqrt{T}$$

oder

$$3N_0 \cdot e^{-\frac{\frac{1}{2}mc^2}{RT}} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot \varrho^3 \cdot N_1 \cdot N_2$$

oder

$$\frac{N_1 \cdot N_2}{N_0} = \frac{3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \varrho^3} e^{-\frac{\frac{1}{2}mc^2}{RT}} = K,$$

wenn wir den für eine bestimmte Temperatur T konstanten Ausdruck auf der rechten Seite mit K bezeichnen. Diese Größe K ist dann identisch mit der Dissoziationskonstante, und die Gleichung selbst ist der Ausdruck der sog. Reaktionsisotherme, die die Abhängigkeit des Gleichgewichts von der Konzentration oder vom Drucke wiedergibt. Da die N_1, N_2, N_0 den Partialdrucken p_1, p_2, p_0 proportional sind, können wir die Gleichung auch schreiben

$$\frac{p_1 \cdot p_2}{p_0} = K'.$$

Für den speziellen Fall, daß $N_1 = N_2$, z. B. bei der Dissoziation des Joddampfes

$$J_2 = 2J,$$

gehen die Gleichungen über in

$$\frac{N^2}{N_0} = K \quad \text{oder} \quad \frac{p^2}{p_0} = K'.$$

Haben wir eine kompliziertere Reaktion, wie z. B. die Dissoziation des Wasserdampfes

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O,$$

so ist leicht ersichtlich, daß, bevor aus H_2 und O_2 sich ein Molekül H_2O bilden kann, zuvor das Molekül sich in $2O$-Atome zerlegen muß. Wir können daher die obige Reaktion zusammensetzen aus den zweien

$$2O = O_2 \text{ und}$$
$$2H_2 + 2O = 2H_2O.$$

Bezeichnet N' die Anzahl der O-Atome, N_1 die der O_2-Moleküle, N_2 die der H_2-Moleküle und N_0 die der H_2O-Moleküle in der Volumeinheit, so ergibt die erste der beiden Reaktionsgleichungen

$$\frac{N'^2}{N_1} = K \quad \text{und die zweite} \quad \frac{N^2 . N'^2}{N_0^2} = K'.$$

Setzen wir aus der ersten Gleichung $N'^2 = KN_1$ in die zweite ein, so folgt

$$\frac{N_2^2 . N_1}{N_0^2} = \frac{K'}{K} = K'',$$

wie es die Thermodynamik verlangt; das ergibt sich, falls auch für das dreiatomige H_2O-Molekül unsere obigen Betrachtungen als gültig angenommen werden.

Solche Zerlegungen in mehrere Reaktionen sind natürlich in verschiedener Weise möglich; welche in Wirklichkeit stattfinden, kann bekanntlich nicht die Thermodynamik entscheiden, wohl aber die Reaktionskinetik.

Die Abhängigkeit der Dissoziationskonstante K von der Temperatur erhalten wir aus der Gleichung für K einfach durch Differentiation. Es ist

$$\frac{dK}{dT} = \frac{3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \varrho^3} \cdot \frac{\frac{mc^2}{2}}{RT^2} \cdot e^{-\frac{\frac{mc^2}{2}}{RT}};$$

wir bilden

$$\frac{1}{K} \cdot \frac{dK}{dT} = \frac{d\ln K}{dT} = \frac{\frac{mc^2}{2}}{RT^2}.$$

Damit haben wir aber die bekannte Gleichung der Reaktionsisochore erhalten, welche lautet

$$\frac{d\ln K}{dT} = \frac{q}{RT^2},$$

worin q die Dissoziationswärme bedeutet. Vergleichen wir den erhaltenen Ausdruck mit diesem, so sehen wir, es ist

$$q = \frac{mc^2}{2},$$

d. h. die Dissoziationswärme ist gleich dem Verlust an kinetischer Energie, den das abdissozisierende Atom beim Herausfliegen aus der Wirkungssphäre erleidet, also gleich der Arbeit, die hierbei von dem herausfliegenden Atom gegen die molekularen Anziehungskräfte geleistet wird.

Umgekehrt ist die positive Wärmetönung bei der Bildung eines Moleküls gleich der Arbeit $A = \frac{mc^2}{2}$, die von den Molekülarkräften beim Hereinfliegen des Atoms in die Wirkungssphäre des anderen geleistet wird. Für diesen Vorgang im molekularen Gebiet gilt also die Bezeichnung $A = q$, für die äußere Arbeit A' jedoch, die wir aus der Wärmeentwicklung q einer chemischen Reaktion berechnen können, gilt nicht die Beziehung, daß $A' = q$ ist, wie dies Berthelot in seinem „troisème principe“, im „principe du travaille maximum“ formuliert, sondern, wie die Thermodynamik lehrt, ist $A' = q + T\frac{dA'}{dT}$. Dies liegt daran, daß wir nicht die kinetische Energie der einzelnen Moleküle ausnützen können, sondern daß unsere gegen die molekularen Dimensionen großen Instrumente nur aus dem Mittelwert der kinetischen Energie sehr vieler Moleküle, deren Bewegung ungeordnet ist, einen Bruchteil in geordnete Bewegung, in Arbeit umzusetzen gestatten.

Die Hauptfrage nach der Größe des Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit ist mit den oben entwickelten Gleichungen schon gelöst. Für die Anzahl der in der Zeiteinheit zerfallenden Moleküle hatten wir gefunden

$$v = -\frac{dN_0}{dt} = \frac{3N_0\sqrt{2R}}{2\varrho\sqrt{m\pi}} \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{\frac{mc^2}{2}}{RT}}.$$

Der Faktor $\sqrt{T}$ würde nur ein geringes Ansteigen der Zerfallsgeschwindigkeit mit der Temperatur bedingen, dagegen ergibt die Exponentialfunktion $e^{-\frac{\frac{mc^2}{2}}{RT}}$ auch bei mäßiger Größe der Dissoziationswärme $q = \frac{mc^2}{2}$ ein sehr schnelles Ansteigen der in der Zeiteinheit sich dissoziierenden Moleküle mit der Temperatur.

Dies ist also, in Worten ausgedrückt, dadurch bedingt, daß die Anzahl der Atome im Molekül, deren Geschwindigkeit den zum Herausfliegen erforderlichen Schwellenwert c überschreitet, nach dem Maxwellschen Verteilungsgesetz in der genannten Exponentialfunktion mit der Temperatur ansteigt.

Die Zahl der in der Zeiteinheit sich bildenden Moleküle AB ist nach dem Obigen

$$v' = \sqrt{\frac{6R}{m}} \cdot \pi\varrho^2 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot \sqrt{T},$$

diese steigt also nur relativ langsam mit steigender Temperatur, nur die Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur proportional.

Bei den gewöhnlich vorkommenden chemischen Reaktionen handelt es sich nicht, wie in dem einfachsten hier behandelten Beispiele, einfach um die Vereinigung von Atomen oder den Zerfall in solche, sondern um Reaktionen zwischen verschiedenen Molekülen, wie z. B. bei der Wasserbildung aus H_2 und O_2:

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O,$$

also um Reaktionen, in deren Verlauf eine primäre Aufspaltung in Atome notwendig ist. Wenn nun die Beobachtung den eingangs erwähnten außerordentlich großen Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit ergibt, so kann das hiernach nur darin begründet sein, daß die zum Eintreten der Reaktion erforderliche primäre Aufspaltung der reagierenden Moleküle einen so großen Temperaturkoeffizienten besitzt und, daß diese Geschwindigkeit es ist, die tatsächlich gemessen wird. Ihr gegenüber müssen wir die Vereinigung der geteilten Bestandteile zu dem neuer Moleküle, die nur der Wurzel aus der Temperatur proportional ansteigt, als unendlich rasch gegenüber jenem Zerfall verlaufend annehmen, sodaß nur dieser und somit sein Temperaturkoeffizient in Erscheinung tritt, eine Vorstellung die durchaus plausibel ist. Der so außerordentlich große Temperaturkoeffizient der Reaktionsgeschwindigkeit ist also dadurch bedingt, daß der primäre Zerfall der Moleküle langsam gegenüber ihrer Wiedervereinigung zu dem neuen Molekül verläuft, und daß die Anzahl der Atome oder Moleküle, welche, jenen Zerfall herbeiführend, aus dem Molekularverbande herausfliegen können, da ihre intramolekularen Bewegungen dem Maxwellschen Verteilungsgesetz gehorchen, in einer Exponentialfunktion mit der Temperatur ansteigt.

Diese Erklärung ist an die oben formulierten und eingehen begründeten Annahmen gebunden. Man übersieht jedoch leicht,

daß der qualitative Charakter der Gleichungen keine wesentliche Aenderung erfährt, wenn man annimmt, daß die Atome im Molekül nicht volle Bewegungsfreiheit besitzen, sondern daß sie nur unter der Einwirkung von Kräften stehen, die ihnen bestimmte Bewegungsrichtungen vorschreiben, und ebenso wenig, was damit zusammenhängt, daß ein bestimmter Bezirk der Wirkungssphäre getroffen werden muß, wenn ein Zusammenstoß zur Molekülbildung führen soll; beide Umstände dürften im wesentlichen nur die konstanten Proportionalitätsfaktoren ändern. Wesentlich bleibt nur die Voraussetzung, daß für die Bewegung der Atome im Molekül das Maxwellsche Verteilungsgesetz gilt, welcher Art im übrigen auch diese Bewegung sein möge.

Nach der Theorie der Reaktionskinetik ist bekanntlich

$$-\frac{dN_0}{dt} = k' N_0 - k'' N_1 . N_2,$$

worin k' und k'' die Geschwindigkeitskoeffizienten bedeuten. Für sie hatten sich uns die Werte ergeben

$$k' = \frac{3}{2\varrho}\sqrt{\frac{2R}{m\pi}} \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{\frac{mc^2}{2}}{RT}} \quad \text{und} \quad k'' = \sqrt{\frac{6R}{m}} \cdot \pi\varrho^2 \cdot \sqrt{T}.$$

Ihr Quotient $\frac{k'}{k''}$ ist gleich der Dissoziationskonstante K.

Es folgt

$$ln\, k' = ln\left(\frac{3}{\pi\varrho}\sqrt{\frac{2R}{m\pi}} \cdot \sqrt{T}\right) - \frac{\frac{mc^2}{2}}{RT}$$

und

$$\frac{dlnk'}{dT} = \frac{1}{2T} + \frac{\frac{mc^2}{2}}{RT^2} = \frac{A}{T^2} + \frac{1}{2T},$$

wenn wir $A = \frac{\frac{mc^2}{2}}{R}$ setzen.

Es sind folgende Formeln vorgeschlagen:

von Berthelot $\frac{dlnk'}{dT} = C,$

von Arrhenius $\frac{dlnk'}{dT} = \frac{A}{T^2},$

von Harcourt und Esson $\frac{d\ln k'}{dT} = \frac{A}{T^2} + \frac{B}{T}$,

von van't Hoff $\frac{d\ln k'}{dT} = \frac{A}{T^2} + C$.

Alle vorgeschlagenen Formeln [1]) lassen sich zusammenfassen in die Gleichung

$$\frac{d\ln k'}{dT} = \frac{A}{T^2} + \frac{B}{T} + C.$$

Die spezielle Form, der hier erhaltenen Gleichung

$$\frac{d\ln k'}{dT} = \frac{A}{T^2} + \frac{1}{2T} = \frac{\frac{mc^2}{2}}{RT^2} + \frac{1}{2T},$$

ist die Folge davon, daß wir die Grenzgeschwindigkeit c und somit die Dissoziationswärme als eine Konstante in die Rechnung eingeführt haben. Dies kann natürlich nur eine Annäherung sein; in Wirklichkeit wird c wenn auch nur wenig mit der Temperatur sich ändern, ebenso wie die Dissoziationswärme q, letzteres bekanntlich dann, wenn die spezifischen Wärmen der in Betracht kommenden Zustände, hier also der Atome im Molekül und außerhalb desselben, gleich sind, wie das unsere Voraussetzungen einschließen. Doch läßt unsere Formel die exakte Gleichung für den Temperaturkoeffizienten der Reaktionsgeschwindigkeit mit großer Wahrscheinlichkeit erraten. Kann nach dem Obigen der Geschwindigkeitskoeffizient der Bildung proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur gesetzt werden, ist also für die Reaktionsgeschwindigkeit nur maßgebend der Zerfall, so wird die hier im Exponenten stehende Größe stets gegeben durch die Dissoziationsarbeit, die andererseits gleich der Dissoziationswärme ist. Statt des konstanten Wertes $q = \frac{mc^2}{2}$, der sich aus unserer vereinfachenden Annahme ergab, wird nur die wirkliche Dissoziationswärme in ihrer Temperaturabhängigkeit einzusetzen sein. Nun läßt sich bekanntlich q darstellen in der Form:

$$q = q_0 + \alpha T + \beta T^2 \ldots,$$

worin α die Differenz der spezifischen Wärme in dem einen und anderen in Betracht kommenden Zustande, hier im Molekularverband und außerhalb bedeutet und β den Temperaturkoeffizienten

1) Vergl. van't Hoff, Vorles. über theoret. u. phys. Chemie, Bd. I, p. 230, Braunschweig 1898.

von α. Setzen wir diesen Wert für q an Stelle von $\frac{mc^2}{2}$ in unsere Formel für den Geschwindigkeitskoeffizienten, so ergibt sich

$$k' = \frac{3\sqrt{2R}}{2\varrho\sqrt{m\pi}} \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{q_0}{RT} - \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R} T} = C \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{q_0}{RT} - \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R} T}$$

oder

$$\ln k' = \ln(C\sqrt{T}) - \frac{q_0}{RT} - \frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R} T,$$

also

$$\frac{d \ln k'}{dT} = \frac{1}{2T} + \frac{q_0}{RT^2} - \frac{\beta}{R}.$$

Hätten wir in der Formel für q noch ein weiteres Glied γT^2 hinzugenommen, so hätte sich ergeben

$$\frac{d \ln k'}{dT} = \frac{q_0}{RT^2} + \frac{1}{2T} - \frac{\beta}{R} - \frac{2\gamma}{R} \cdot T$$

als allgemeinste Formel für den Temperaturkoeffizienten des Logarithmus des Geschwindigkeitskoeffizienten, in der die Konstanten die angegebene physikalische Bedeutung haben. Es ist jedoch zu bedenken, daß dies q_0 nicht einfach die Bedeutung der Wärmetönung der Gesamtreaktion hat in der Gleichung

$$\frac{d \ln K}{dT} = \frac{q_0 + \alpha T + \beta T^2 + \gamma T^3}{RT^2},$$

sondern daß es die Wärmetönung desjenigen Molekularzerfalles bedeutet, der die Geschwindigkeit bestimmt, also z. B. in dem obigen Beispiel der Knallgasreaktion die Wärmetönung der Reaktion

$$O_2 = 2O.$$

Lassen sich also Anhaltspunkte dafür gewinnen, welche solche Reaktion die Geschwindigkeit bestimmt, so dürften damit Wärmetönungen der Berechnung zugänglich werden, die sich bisher ihr völlig entzogen.

Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.

(Dritte Mitteilung).

Von

Paul Koebe.

Vorgelegt durch Herrn F. Klein in der Sitzung vom 11. Juli 1908.

Das Problem der Uniformisierung einer beliebig gegebenen algebraischen oder überhaupt analytischen Funktion $y(x)$ läßt unendlich viele Lösungen zu. Unter allen möglichen Uniformisierungstranszendenten sind diejenigen besonders ausgezeichnet, bei welchen das Gebiet, innerhalb dessen die uniformisierende Variable veränderlich zu denken ist, entweder selbst einfach zusammenhängend ist oder aus zwei zu einander symmetrischen einfach zusammenhängenden Hälften besteht. Der Nachweis der Existenz aller zu einer gegebenen Funktion $y(x)$ gehörenden Uniformisierungstranszendenten dieser Art reduziert sich wesentlich auf den Nachweis eines allgemeinen Abbildungssatzes über einfach zusammenhängende Bereiche, nämlich des Satzes, daß jeder nach Art einer Riemannschen Fläche über der Ebene ausgebreitete endlich- oder unendlich-vielblättrige einfach zusammenhängende Bereich umkehrbar eindeutig und konform entweder auf die schlichte Fläche eines Kreises oder auf die schlichte ganze Ebene excl. des unendlich fernen Punktes oder auf die ganze Ebene incl. des unendlich fernen Punktes abgebildet werden kann. Für diesen Satz habe ich in zwei früheren Noten „über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“ [1])

1) Erste u. zweite Mitteilung, Gött. Nachrichten. Sitzung vom 12. Mai u. 23. Nov. 1907, pag. 191 ff, und 633 ff. der Nachrichten.



zwei Beweise mitgeteilt[1]). Um dieselbe Zeit wurde von Herrn Poincaré (Anfang November 1907) ein Beweis des genannten Satzes publiziert[2]). Zu diesem allgemeinen Abbildungssatze, bei welchem die Abbildungsbeziehung nur insoweit betrachtet wurde, als sie sich auf die inneren Punkte der auf einander abzubildenden Bereiche erstreckt, trat noch ein anderer Satz als Ergänzungssatz hinzu, welcher die Ausdehnung der Abbildungsbeziehung auf etwa vorhandene analytische Begrenzungsstücke der gegebenen einfach zusammenhängenden Fläche betraf[3]).

Ist jetzt t irgend eine zu einer analytischen Funktion $y(x)$ gehörende uniformisierende Variable, für welche das Gebiet ihrer Veränderlichkeit ganz willkürlich, allgemein zu reden, unendlich-vielfach zusammenhängend vorzustellen ist, so wird die zur Erklärung der Größe t dienende analytische Funktion $t(x, y)$, eine allgemein zu reden, unendlich-vieldeutige Funktion des Ortes auf der zur Funktion $y(x)$ gehörenden Riemannschen Fläche F sein und zwar eine solche Funktion, welche keinen ihrer Werte mehr als ein Mal annimmt, sodaß dieselbe eine umkehrbar eindeutige konforme Beziehung zwischen der zur Funktion $t(x, y)$ gehörenden Riemannschen Fläche Φ einerseits und dem schlichten Wertegebiet T der Größe t andererseits herstellt. Diesem Umstande entsprechend wird die Riemannsche Fläche Φ eine über der Fläche F ausgebreitet zu denkende Fläche sein, welche die Eigenschaft besitzt, sich im Sinne der Analysis situs wie eine schlichte Fläche zu verhalten, d. h. eine Fläche, welche durch jeden auf ihr gezogenen Rückkehrschnitt in getrennte Stücke zerfällt.

Das Uniformisierungsproblem, in allgemeinster Weise aufgefaßt, hängt demnach wesentlich mit dem Nachweise des folgenden allgemeinen Abbildungssatzes zusammen.

Ein allgemeines Abbildungsprinzip: Es sei B irgend ein nach Art einer Riemannschen Fläche[4]) über der x-

---

1) Eine unwesentlich modifizierte Wiedergabe des von mir in der ersten Mitteilung entwickelten Beweises findet man bei Fubini: „Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe". Pisa, 1908; Spoerri. Eine wesentlich vervollkommnete Darstellung dieses meines ersten Beweises gebe ich selbst in einer demnächst erscheinenden Arbeit „Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven (Reelle Substitutionsgruppen)". Math. Annalen, 1909, Bd. 67.

2) Act. math. Bd. 31, pag. 1 ff.: „Sur l'uniformisation des fonctions analytiques; s. insbes. pag. 46—63.

3) Zweite Mitteilung § 2, pag. 657 ff.

4) Die Annahme, daß B ein über der Ebene wie eine Riemannsche Fläche

Ebene ausgebreiteter Bereich, welcher endlich- oder unendlich-vielblättrig sein kann und welcher endliche oder unendlich hohe Ordnung des Zusammenhangs haben kann; der Bereich B kann in seinem Innern endlich oder unendlich viele Windungspunkte haben, die Ordnung jedes einzelnen inneren Windungspunktes ist jedoch endlich[1]). Hat der Bereich B in irgend einem seiner Blätter Grenzpunkte oder ganze Begrenzungslinien, so werden dieselben zum Bereiche B selbst nicht mitgerechnet. Außer den genannten Eigenschaften soll der Bereich B noch die Eigenschaft besitzen, sich im Sinne der Analysis situs wie ein schlichter Bereich zu verhalten, d. h. die Eigenschaft durch jede ganz in seinem Innern verlaufende einfach geschlossene Linie in zwei getrennte Stücke zu zerfallen.

Unter den genannten völlig allgemeinen Voraussetzungen gilt die Behauptung: es ist möglich, den Bereich B, der gemäß obiger Definition nur aus inneren Punkten besteht, umkehrbar eindeutig und konform auf einen passend zu wählenden schlichten Bereich abzubilden, welch letzterer als ein ebenfalls nur aus inneren Punkten bestehender Bereich allgemeinster Begrenzungsart zu denken ist. Die Zusammenhangszahl des letzteren Bereichs ist selbstverständlich, jenachdem die Zusammenhangszahl des Bereichs B endlich oder unendlich ist, ebenfalls endlich oder unendlich.

Ist es gelungen, das vorstehende allgemeine Abbildungsprinzip darzutun, so erhält man den Satz, daß die Fläche Φ, sofern sie als Riemannsche Fläche einer zu bestimmenden Uniformisierungstranszendenten $t(x, y)$ aufgefaßt wird, lediglich der Bedingung unterworfen ist, eine über F ausgebreitete Fläche zu sein, welche

---

ausgebreiteter Bereich ist, ist übrigens für die unten mitgeteilten Beweise nicht wesentlich. Wesentlich ist nur, daß B eine aus lauter inneren Punkten bestehende zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist, so beschaffen, daß in der Mannigfaltigkeit eine gewisse Umgebung jedes einzelnen inneren Punktes angegeben werden kann, die nachweislich umkehrbar eindeutig und konform auf die schlichte Fläche eines Kreises abbildbar ist. (Vgl. F. Kleins allgemeinen Begriff der geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit oder des Fundamentalbereichs. Math. Ann. 21, pag. 146 ff. (1883) bezw. Bd. 40, pag. 130 ff. (1892)).

1) Windungspunkte unendlich hoher Ordnung gelten als Grenzpunkte.

sich im Sinne der Analysis situs wie eine schlichte Fläche verhält. Diese Tatsache formulieren wir besonders in dem folgenden Satze.

Ein allgemeines Uniformisierungsprinzip: Jede vom Standpunkte der Analysis situs mögliche Uniformisierung einer analytischen Funktion kann auch funktionentheoretisch verwirklicht werden[1]). —

Zweck dieser Mitteilung ist, das allgemeine Abbildungsprinzip und damit zugleich das allgemeine Uniformisierungsprinzip vollständig zu begründen.

Wir werden zunächst den Fall eines endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs B betrachten. In diesem Falle gelingt es, den Nachweis des Abbildungsprinzips ohne neue Konvergenzbetrachtungen zu erbringen lediglich durch Zurückgehen auf Resultate der ersten und zweiten Mitteilung und mit Benutzung der Schwarzschen Methode der gürtelförmigen Verschmelzung. Wir können uns dabei entweder auf den allgemeinen Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Bereiche stützen oder aber auf ein Teilresultat der zweiten Mitteilung, welches besagt, daß es möglich ist, jede zweifach zusammenhängende Fläche, welche eine analytische geschlossene Begrenzungslinie aufweist, umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche eines Kreisrings abzubilden, dessen einer Begrenzungskreis sich ev. auf einen Punkt reduzieren kann[2]). Jenachdem wir uns auf das eine oder das andere Resultat stützen, wollen wir sagen, wir stützen uns auf (I) oder (II).

Für das allgemeine Abbildungsprinzip bei unendlich hohem Zusammenhange des gegebenen Bereichs B teilen wir unten zwei Beweise mit, bei deren erstem wir die Fläche B in der Form $B = \lim_{n=\infty} B_n$ auffassen, während wir beim zweiten Beweise

---

1) Vgl. die (bisher noch nicht erschienenen) Verhandlungen des vierten internationalen Mathematikerkongresses zu Rom 1908, Vortrag des Verfassers: „Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip".

2) Wir haben diesen Beweis in der zweiten Mitteilung (1907) für den Bereich B_1 geführt, bei welchem die in Rede stehende reguläre Begrenzungslinie allerdings speziell als ein Kreis K_0, (pag. 636) gewählt war. Es ändert sich jedoch in der Beweisführung nichts wesentliches, wenn der Kreis durch irgend eine geschlossene analytische Linie $\varkappa_0$ ersetzt gedacht wird. Man hat gleichzeitig dann den pag. 637 erklärten Kreis K_1 durch eine geschlossene reguläre Linie $\varkappa_1$ zu ersetzen und an Stelle des Hilfspotentiales $h_n(P)$ (pag. 638) tritt ein Potential, welches die Eigenschaft besitzt, auf $\varkappa_0$ zu verschwinden und auf $\varkappa_1$ den Wert m_n anzunehmen.



uns aus der Fläche B zuvor ein einfach zusammenhängendes Stück ausgeschnitten denken, sodaß ein unendlich-vielfach zusammenhängender Bereich mit einer regulären geschlossenen Begrenzungslinie übrig bleibt. Für diesen letzteren Bereich beweisen wir die Richtigkeit des Abbildungsprinzips und gelangen dann zu einer Abbildung des Bereiches B selbst durch Anwendung der genannten Methode der gürtelförmigen Verschmelzung. Es entspricht demnach in gewisser Hinsicht die erste Beweismethode unserem in der ersten Mitteilung gegebenen Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes für einfach zusammenhängende Bereiche, während die zweite Beweismethode dem in der zweiten Mitteilung gegebenen Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes für einfach zusammenhängende Bereiche entspricht. Beide unten mitgeteilten Beweise des allgemeinen Abbildungsprinzips für unendlich-vielfach zusammenhängende Bereiche sind übrigens ganz unabhängig von den Resultaten der ersten und zweiten Mitteilung. Vielmehr stellen dieselben, auf den Fall eines einfach- oder endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs angewandt, zwei neue einfache Beweise des allgemeinen Abbildungssatzes für einfach bezw. endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche dar.

Für die zum Beweise des allgemeinen Abbildungsprinzips für unendlich-vielfach zusammenhängende Bereiche B dienende Konvergenzuntersuchung ist die Anwendung des folgenden Konvergenzsatzes über analytische Funktionen charakteristisch:

Allgemeiner Konvergenzsatz über analytische Funktionen: Ist in einem Bereiche eine unendliche Folge von analytischen Funktionen erklärt, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer von der Wahl der Funktion unabhängigen endlichen Grenze bleiben, so kann aus der Reihe der genannten Funktionen eine Serie ausgewählt werden, welche in dem genannten Gebiete gleichmäßig konvergiert[1]).

Den Anlaß zur Aufstellung sowie den Grundgedanken zum Beweise dieses Satzes bot mir ein analoger Satz über stetige Funktionen, welchen Herr Hilbert in seiner vierten Mitteilung zur Theorie der Integralgleichungen entwickelt hat, nämlich folgender Satz.

„Es sei J ein ganz im Endlichen gelegenes Intervall für die Variable s, ferner

1) Die präzise und zugleich etwas weitergehende Fassung s. unten pag. 18: „Dritter Hilfssatz“.

$$f_1(s),\ f_2(s),\ f_3(s),\ \ldots$$

eine unendliche Reihe von Funktionen der Variabeln s, die in J stetig sind, deren Werte absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze bleiben und deren Differenzenquotienten sämtlich unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, sodaß für alle s, t in J stets

$$\frac{f_h(s)-f_h(t)}{s-t} \leqq E$$

gilt, wo E eine endliche von h und von der Wahl der Argumente s, t unabhängige Größe bedeutet:

Alsdann lassen sich aus eben dieser Reihe von Funktionen unendlich viele Funktionen

$$f_1^*(s),\ f_2^*(s),\ f_3^*(s),\ \ldots$$

auswählen derart, daß die Reihe dieser Funktionen für jeden beliebigen Punkt in J gegen einen endlichen Grenzwert und zwar stetig (mithin auch gleichmäßig) konvergiert, woraus ersichtlich ist, daß der Limes

$$\underset{p=\infty}{L} f_p^*(s)$$

eine in J stetige Funktion von s darstellt[1]).

Die von Herrn Klein aufgestellten auf Gruppen aus imaginären Substitutionen sich beziehenden „Fundamentaltheoreme"[2]) der Uniformisierung algebraischer Funktionen, welche in Verbindung namentlich mit der durch Herrn Poincarés Arbeit „Sur un théorème de la théorie générale des fonctions" (Bull. t. 11, 1884) eröffneten großen Perspective mich zur Aufstellung des allgemeinen Uniformisierungsprinzips führten, sind (wenigstens qualitativ) als Spezialfälle in diesem Prinzip enthalten; (vgl. den Schluß dieser Mitteilung). Unser allgemeines Abbildungsprinzip kann in der Tat auch zu einem Beweise jener Klein-

1) Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung. Gött. Nachr. 1906, pag. 162. Vgl. auch Hilberts Festschrift „über das Dirichletsche Prinzip", Berlin 1901, Weidmannsche Buchhandlung, § 3: „Allgemeiner Hilfssatz über gleichmäßige Konvergenz", sowie die daselbst von Herrn Hilbert zitierte weitere Litteratur: Bendixson, Öfversigt of kongl. Vetenskaps-Akademius Forhandlinger, Bd. 54, Townsend, „Begriff und Anwendung des Doppellimes", Inauguraldissertation, Göttingen 1900, S. 34.

2) S. namentlich die zusammenfassende Abhandlung von F. Klein: „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie". Math. Ann. Bd. 21, 1883.



schen Sätze dienen[1]), für welche ich in einer Voranzeige[2]) eine andere auf der Anwendung eines iterierenden Verfahrens beruhende Lösung mitgeteilt habe.

Beweis des allgemeinen Abbildungsprinzips für zweifach zusammenhängende Bereiche.

Erste Methode. (Zurückführung auf (I)). Ist der Bereich B zweifach zusammenhängend, so kann man von der Fläche B vermittelst des uns geläufigen Ueberlagerungsprozesses zu einer über B unendlich-vielblättrig ausgebreiteten, relativ zu B unverzweigten einfach zusammenhängenden Fläche B gelangen, welch letztere auf Grund des Resultates (I) umkehrbar eindeutig und konform entweder auf das Innere einer von der Axe des Reellen begrenzten Halbebene (obere Halbebene) oder auf die ganze Ebene (excl. unendlich ferner Punkt) abgebildet werden kann. Einem Punkte der Fläche B entsprechen bei dieser konformen Abbildung unendlich viele Punkte, welche vermöge einer aus einer parabolischen oder hyperbolischen Erzeugenden gebildeten Gruppe linearer Substitutionen aus einem einzigen Punkte hervorgehen; im Falle der ganzen Ebene ist die erzeugende Substitution stets parabolisch. Bezeichnen wir die Ebene, auf welche die konforme Abbildung stattgefunden hat als ζ-Ebene, so haben wir folgende beiden Formen der Erzeugenden zu betrachten

$$\zeta' = c\zeta \qquad (c \text{ reell positiv, ungleich eins})$$
$$\zeta' = \zeta + C \quad (C \text{ reell positiv}).$$

Bilden wir im ersten Falle die Funktion

$$Z = \zeta^{\frac{2\pi i}{\log c}}$$

im zweiten Falle die Funktion

$$Z^* = e^{\frac{2\pi i \zeta}{C}} \quad ^{3})$$

so werden je zwei einander korrespondierende Punkte der ζ-Ebene in einen und denselben Punkt der Z-Ebene bezw. Z^*-Ebene verwandelt. Die Fläche B wird dadurch auf einen von zwei kon-

1) Vgl. l. c.: „Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip" (Römischer Vortrag) sowie eine demnächst in den Math. Annalen erscheinende Abhandlung des Verfassers „Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven (Imaginäre Substitutionsgruppen)" sowie eine gleichbetitelte, bisher noch nicht vorgelegte, Mitteilung in den Gött. Nachr. (1909).

2) Gött. Nachr., Sitzung vom 22. Februar 1908, pag. 112 ff.

3) Vgl. § 1, d der zweiten Mitteilung, pag. 648 ff.

zentrischen Kreisen begrenzten Ring der Z-Ebene bezw. auf einen analog beschaffenen aber ausgearteten Ring der Z^*-Ebene abgebildet; die Ausartung kann eine einfache oder zweifache sein, insofern als entweder nur der innere Begrenzungskreis sich auf einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt des Kreisrings, zusammenzieht oder aber auch der äußere Begrenzungskreis sich auf einen Punkt reduziert, nämlich den unendlich fernen Punkt der Ebene. (Der letztere Fall tritt dann und nur dann ein, wenn in der ζ-Ebene der Fall der ganzen Ebene vorgelegen hat).

Zweite Methode. (Andere Methode der Zurückführung auf (I)). Wir können den Fall eines zweifach zusammenhängenden Bereichs B noch in anderer Weise auf den Fall eines allerdings nur „ideal" einfach zusammenhängenden Bereichs zurückführen. Zu dem Zwecke denken wir uns auf B zwei vollständig im Innern von B getrennt verlaufende einfach geschlossene Linien L_1 und L_2 gezogen, welche den Bereich B in drei zweifach zusammenhängende Stücke zerlegen. Das von L_1 und L_2 begrenzte Stück werde mit β bezeichnet, die beiden anderen mit β_1 und β_2, wobei β_1 das an L_1, β_2 das an L_2 anstoßende Gebiet sein soll. Das Gebiet β können wir ohne weiteres umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche eines von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten die Ebene nirgends mehrfach bedeckenden Kreisrings $\overline{\beta}$ abbilden, dessen äußerer Begrenzungskreis, K_a, der Linie L_1 und dessen innerer Begrenzungskreis, K_i, der Linie L_2 entsprechen möge. Der Kreis K_a, allein genommen, begrenzt eine bestimmte endliche Kreisfläche, die wir mit $K_a^{(i)}$ bezeichnen wollen; dieselbe enthält also den Bereich $\overline{\beta}$ als Teilbereich.

Betrachten wir nunmehr die vermöge der Beziehung zwischen β und $\overline{\beta}$ ideal einfach zusammenhängende Fläche $((\beta_1 + \beta) + K_a^{(i)})$, so können wir auf diese Fläche den allgemeinen Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Bereiche anwenden. Bei der sich ergebenden konformen Abbildung der genannten idealen Fläche auf die schlicht zu denkende Fläche eines Kreises bezw. der ganzen Ebene (excl. unendlich ferner Punkt) geht die zweifach zusammenhängende Fläche $(\beta_1 + \beta)$ in ein zweifach zusammenhängendes Gebiet $(\beta_1 + \beta)'$ über, welches zur äußeren Begrenzung einen Kreis bezw. den unendlich fernen Punkt hat, während die innere, L_2 entsprechende Begrenzungslinie eine reguläre geschlossene Linie ist. Auf analoge Weise können wir zu einer konformen Abbildung der Fläche $(\beta + \beta_2)$ auf ein die Ebene nirgends mehrfach bedeckendes zweifach zusammenhängendes Gebiet $(\beta + \beta_2)'$ gelangen, welches nach außen entweder durch einen Kreis oder durch den

unendlich fernen Punkt begrenzt wird, während die innere, L_1 entsprechende Begrenzungslinie eine reguläre geschlossene Linie ist. Die beiden Gebiete $(\beta_1+\beta)'$ und $(\beta+\beta_2)'$ definieren uns nun, da sie beide partiell auf β konform abgebildet sind, einen idealen zweifach zusammenhängenden Bereich, für welchen die konforme Abbildung auf einen natürlichen zweifach zusammenhängenden Bereich keine Schwierigkeit mehr darbietet.

Mit Rücksicht auf die sogleich vorzunehmende Uebertragung des Gedankens auf endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche B wollen wir uns die letztgenannte konforme Abbildung in der Weise bewerkstelligt denken, daß wir uns den idealen zweifach zusammenhängenden Bereich $((\beta_1+\beta)'+(\beta+\beta_2)')$ zuvor zu einem idealen geschlossenen einfach zusammenhängenden Bereich ergänzt denken, indem wir jeden der Bereiche $(\beta_1+\beta)'$ und $(\beta+\beta_2)'$ über seine äußere Begrenzung hinweg ins Unendliche fortsetzen unter Einbeziehung auch des unendlich fernen Punktes selbst. Bei der konformen Abbildung des so gewonnenen idealen geschlossenen Bereichs auf die schlicht zu denkende Oberfläche der Vollebene (schlichte Ebene incl. unendlich ferner Punkt) geht die genannte ideale zweifach zusammenhängende Fläche $(\beta_1+\beta)'+(\beta+\beta_2)'$ in einen natürlichen zweifach zusammenhängenden Bereich über, dessen Begrenzung, sofern sie nicht punktförmig ist, jedenfalls regulär analytisch ist.

Dritte Methode. (Zurückführung auf (II)). Die dritte Methode unterscheidet sich von der zweiten nur dadurch, daß die konforme Abbildung des Bereichs $(\beta_1+\beta)$ auf $(\beta_1+\beta)'$ sowie des Bereichs $(\beta+\beta_2)$ auf $(\beta+\beta_2)'$ einfach als eine unmittelbare Anwendung des oben zitierten Resultats (II) betrachtet wird.

Beweis des allgemeinen Abbildungsprinzips für endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche[1]).

Ist jetzt B irgend ein endlich-vielfach zusammenhängender Bereich, welcher sich im Sinne der Analysis situs wie ein schlichter Bereich verhält, so sei $m \geqq 3$ die Ordnungszahl seines Zusammenhanges. Auf der Fläche B konstruieren wir m ganz im Innern dieser Fläche getrennt verlaufende einfach geschlossene Linien $L_1, \ldots, L_m$, durch welche die Fläche B in $m+1$ Stücke zerlegt

1) Nach Analogie der soeben im Falle eines zweifach zusammenhängenden Bereichs dargelegten zweiten bezw. dritten Methode.

wird, und zwar ein m-fach zusammenhängendes Stück β_0 und m zweifach zusammenhängende Stücke. Jedes der letzteren Stücke können wir wiederum durch eine ganz in seinem Innern verlaufende einfach geschlossene Linie in zwei zweifach zusammenhängende Stücke zerlegen, so daß die Fläche B in $2m+1$ Stücke zerlegt ist:

$$B = \beta_0 + \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{21} + \beta_{22} + \cdots + \beta_{m1} + \beta_{m2}.$$

Die Bezeichnung der Bereiche mit doppeltem Index sei so gewählt, daß $\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{m1}$ an β_0 angrenzen, während von den übrigen jedesmal $\beta_{\alpha 2}$ an $\beta_{\alpha 1}$ anstößt.

Wir bilden nun den zweifach zusammenhängenden Bereich $(\beta_{\alpha 1} + \beta_{\alpha 2})$ $[\alpha = 1, 2, \ldots, m]$ nach den vorher für $(\beta_1 + \beta)$ und $(\beta + \beta_2)$ erläuterten Verfahren (entweder mit Benutzung von (I) oder von (II)) umkehrbar eindeutig und konform auf einen die Ebene nirgends mehrfach bedeckenden zweifach zusammenhängenden Bereich $(\beta_{\alpha 1} + \beta_{\alpha 2})'$ ab, welcher nach außen von einem sich ev. auf den unendlich fernen Punkt reduzierenden Kreise $K^{(\alpha)}$ begrenzt wird, während die innere, L_α korrespondierende Begrenzungslinie eine reguläre geschlossene Linie ist. Dadurch gewinnen wir, analog wie vorher im Falle des zweifach zusammenhängenden Bereichs, wieder die Möglichkeit, von der Fläche B den Uebergang zu einer idealen geschlossenen einfach zusammenhängenden Fläche zu machen, von welch letzterer die Fläche B als ein Teil aufzufassen ist. Bei der konformen Abbildung dieser geschlossenen Fläche auf die Vollebene geht dann die gegebene Fläche B in einen natürlichen schlichten Bereich über, dessen Begrenzung von m regulären einfach geschlossenen analytischen Linien gebildet wird, welche sich zum Teil oder auch sämtlich auf Punkte reduzieren können.

Erster Beweis des allgemeinen Abbildungsprinzips für unendlich-vielfach zusammenhängende Bereiche[1]).

Wir nehmen nunmehr an, der auf einen schlichten Bereich abzubildende Bereich B sei von unendlich hoher Ordnung des Zusammenhanges. In diesem Falle ist es möglich, ihn als Grenze von lauter endlich-vielfach zusammenhängenden endlich-vielblättrigen analytisch begrenzten Bereichen

$$B_1 < B_2 < B_3 < \ldots$$

1) Zugleich als neuer Beweis des allgemeinen Abbildungssatzes für einfach bezw. endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche.



aufzufassen, deren einzelner den kombinatorischen Methoden von Schwarz-Neumann zugänglich ist.

Im Innern von B_1 wählen wir einen Punkt 0, welcher der Einfachheit halber mit keinem Verzweigungspunkt und auch nicht mit einem unendlich fernen Punkt zusammenfallend vorgestellt werde.

Wir betrachten die Ebene, über welcher die Fläche B ausgebreitet gedacht wird, als Ebene einer komplexen Veränderlichen x. Dann können wir eine unendliche Folge von analytischen Funktionen

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \ldots$$

folgenden Bedingungen gemäß definieren: Die Funktion $\varphi_n(x)$ existiert im ganzen Innern des Bereichs B_n als eine eindeutige und überall (excl. 0) reguläre Funktion; im Punkte 0 ($x = x_0$) wird die Funktion $\varphi_n(x)$ unendlich wie $\frac{1}{x-x_0}$. Die Funktion $\varphi_n(x)$ nimmt im Gebiete B_n niemals an zwei verschiedenen Stellen einen und denselben Wert an, sie nimmt ferner den Wert Null im ganzen Gebiet B überhaupt nicht an. Die Aussage, daß es eine den genannten Bedingungen genügende Funktion gibt, ist im wesentlichen mit folgendem Satze gleichbedeutend.

Erster Hilfssatz[1]): Jeder endlich-vielblättrige endlich-vielfach zusammenhängende Bereich mit wohldefinierter (etwa analytischer) Begrenzung[2]), der sich im Sinne der Analysis situs wie ein schlichter Bereich verhält oder, anders ausgedrückt, für welchen die Ordnungszahl des Zusammenhanges gleich der Anzahl der Begrenzungslinien ist, läßt sich umkehrbar eindeutig und konform auf einen schlichten Bereich abbilden. —

Beweis: Der Beweis kann durch Uebergang zu einem idealen geschlossenen einfach zusammenhängenden Bereich unter Heranziehung der gürtelförmigen Verschmelzung analog geführt werden, wie der vorher gegebene Beweis des allgemeinen Abbil-

1) Diesen Satz habe ich bereits in der Arbeit „Ueber konforme Abbildung mehrfach-zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird", Jahresbericht der D. M. V. 1906, aufgestellt und auf andere Weise bewiesen. Der dort gegebene Beweis stimmt jedoch mit dem hier mitgeteilten Beweise im Grundgedanken überein.

2) Es kommt hier nicht darauf an, hinsichtlich der Natur der zulässigen Begrenzung möglichste Allgemeinheit zu haben, da die Begrenzung der Bereiche B_n analytisch gewählt werden kann. Man vergleiche übrigens auch die bezüglichen Bemerkungen in Jahresbericht 1906, l. c.



dungsprinzips für endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche, mit dem Unterschiede jedoch, daß die Berufung auf die Resultate (I) und (II) der ersten bezw. zweiten Mitteilung unter den hier vorliegenden einfacheren Voraussetzungen nicht erforderlich ist.

Die abzubildende Fläche wird, wenn m die Anzahl ihrer Begrenzungslinien ist, in $m+1$ Stücke zerlegt, ein m-fach zusammenhängendes und m zweifach zusammenhängende. Letztere können dann sofort je auf einen schlichten Kreisring abgebildet werden, womit wiederum die Möglichkeit des Ueberganges zu einer idealen geschlossenen einfach zusammenhängenden Fläche gegeben ist, welch letztere die gegebene Fläche vollständig in ihrem Innern enthält.

Wir wollen jetzt beweisen, daß man aus der Reihe der Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... nach einem wohldefinierbaren Verfahren eine unendliche Folge so herausgreifen kann, daß dieselbe in der ganzen Fläche B gleichmäßig konvergiert.

Wir machen dabei von einigen weiteren Hilfssätzen Gebrauch, welche wir vorweg entwickeln wollen.

Zweiter Hilfssatz: In einer φ-Ebene sei ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet Σ gegeben, welches den unendlich fernen Punkt der Ebene in seinem Innern enthält, den Nullpunkt hingegen ausschließt. Ist Σ' irgend ein anderer Bereich, welcher denselben Bedingungen wie Σ genügt und welcher umkehrbar eindeutig und konform auf den Bereich Σ abgebildet werden kann derart, daß die analytische Funktion von φ, welche die konforme Abbildung vermittelt, sich im Unendlichen entwickeln läßt in der Form

$$\varphi + \text{regulärer Bestandteil},$$

dann gibt es eine endliche positive Größe μ die nur von der Wahl von Σ abhängt und so beschaffen ist, daß für jeden den Bedingungen genügenden Bereich Σ' die weiteste Entfernung seiner Begrenzung (Begrenzung von Σ') vom Nullpunkte kleiner ist als μ.

Der vorstehende Satz ist inhaltlich gleichbedeutend mit dem von mir in der ersten Mitteilung entwickelten zweiten Hilfsatze (insbesondere zweite Form des zweiten Hilfssatzes)[1]. Man erkennt

---

1) Gött. Nachr., 1907, p. 204: „Es sei ein die z-Ebene schlicht überdeckender ganz im Endlichen liegender Bereich Σ gegeben, der den Nullpunkt in seinem Innern enthält. Faßt man die Gesamtheit aller ganz im Endlichen gelegenen Bereiche Σ' ins Auge, welche den Nullpunkt im Innern enthalten, die Ebene schlicht

dies sofort durch Anwendung einer Transformation durch reziproke Radien mit dem Nullpunkt als Transformationszentrum.

Dritter Hilfssatz: Gegeben sei eine beliebige endlich- oder unendlich-vielblättrige Riemannsche Fläche Φ, welche wir uns über der x-Ebene ausgebreitet denken und von welcher wir nur die inneren Punkte (nicht Grenzpunkte) in Betracht ziehen. Ferner seien unendlich viele analytische Funktionen

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots$$

gegeben, deren n-te in einem Teilbereiche Φ_n von Φ, wobei $\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3 < \ldots$ ist, regulär und eindeutig erklärt sein möge. Es sei bekannt, daß sämtliche Funktionen der obigen Reihe dem absoluten Betrage ihrer Werte nach unterhalb einer von der Wahl des Index n unabhängigen endlichen Größe μ bleiben und daß $\lim_{n=\infty} \Phi_n = \Phi$ ist. Dann gibt es eine unendliche Folge von ganzen positiven Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, sodaß die Funktionen

$$\varphi n_1(x), \quad \varphi n_2(x), \quad \varphi n_3(x), \ldots$$

eine in jedem endlich-vielblättrigen, nicht bis zur Grenze von Φ sich erstreckenden Teilgebiete von Φ gleichmäßig konvergente Folge bilden.

Die Grenzfunktion $\varphi(x)$ existiert im ganzen Innern der Fläche Φ. —

Beweis[1]): Im Innern der Fläche Φ denken wir uns zunächst eine abzählbare Menge M von Punkten so definiert, daß jeder beliebige innere Punkt der Fläche Φ ein Häufungspunkt für die Menge M ist. Als Menge M ist beispielsweise die Menge aller derjenigen inneren Punkte von Φ geeignet, welche durch x-Werte mit rationalem reellen und imaginären Bestandteil repräsentiert werden. Dabei wird es dann, falls Φ unendlich-vielblättrig ist, vorkommen, daß zu einem und demselben x-Werte unendlich viele Punkte der Menge M gehören, die eben in unendlich vielen verschiedenen Blättern der Fläche Φ liegen. Wir bezeichnen die Punkte der Menge M in einer bestimmten Reihenfolge mit

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots$$

überdecken und mittelst eindeutig umkehrbarer konformer Abbildung in den Bereich Σ übergeführt werden können, derart, daß der Nullpunkt bei der Abbildung in sich übergeht und daß das Vergrößerungsverhältnis an der Nullstelle den Wert eins hat, so gibt es eine nicht verschwindende Kreisfläche K, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat und ganz im Innern aller Bereiche Σ' liegt".

1) Vgl. Hilbert, Bendixson, Townsend (l. c.).

Eine solche Reihenfolge festzulegen, hat keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Betrachten wir jetzt die Werte

$$\varphi_1(P_1),\quad \varphi_2(P_1),\quad \varphi_3(P_1),\ \dots$$

welche die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ im Punkte P_1 annehmen, so müssen dieselben, da sie infolge der Voraussetzung alle, absolut genommen, unterhalb μ liegen, mindestens einen Häufungswert haben. Um bestimmtes zu definieren, fassen wir etwa denjenigen Häufungswert ins Auge, welcher den kleinsten absoluten Betrag hat, und wenn dieser Bedingung mehrere Häufungswerte genügen, unter diesen Häufungswerten denjenigen, welchem die kleinste Amplitude entspricht. Es sei H_1 der auf diese Weise definierte Häufungswert. Dann greifen wir aus der Reihe der Zahlen 1, 2, 3, ... folgendermaßen eine unendliche Folge

$$n_1^{(1)} < n_2^{(1)} < n_3^{(1)} < \dots$$

heraus. Wir nehmen $n_1^{(1)} = 1$. Ferner nehmen wir alle diejenigen Indexwerte auf, für welche der betreffende Funktionswert an der Stelle P_1 gerade gleich H_1 wird. Es können unendlich viele solche Indexwerte existieren; es brauchen andererseits überhaupt keine solchen Indexwerte zu existieren. Im ersteren Falle nehmen wir die erwähnten unendlich vielen Indexwerte geradezu als die Reihe $n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, \cdots$. Im zweiten Falle gehen wir noch diejenigen Indexwerte der Reihe nach durch, für welche der Funktionswert an der Stelle P_1 erstens wirklich existiert und zweitens von H_1 verschieden ist. Den ersten d i e s e r Indexwerte nehmen wir in die von uns zu bildende Serie u n b e d i n g t auf. Von den übrigen der Reihe nach zu betrachtenden aber nehmen wir dann und nur dann einen Index auf, wenn der zugehörende Funktionswert auch eine w i r k l i c h e A n n ä h e r u n g an den Häufungswert H_1 darstellt.

Auf diese Weise haben wir aus der Reihe 1, 2, 3, ... nach einem w o h l d e f i n i e r t e n Prinzip eine unendliche Serie $n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, n_3^{(1)}, \dots$ ausgeschieden, für welche charakteristisch ist e r s t e n s, daß $n_1^{(1)} = 1$ ist und z w e i t e n s, daß der Grenzwert $\lim_{\nu=\infty} \varphi_{n_\nu^{(1)}}(P_1)$ existiert, (nämlich $= H_1$; $|H_1| \leq \mu$).

Wir können nun die neue Serie zugrunde legen und aus ihr, indem wir an Stelle von P_1 den Punkt P_2 treten lassen, eine wieder unendliche Serie

$$n_1^{(2)} < n_2^{(2)} < n_3^{(2)} < \dots$$

herausgreifen, für welche außer

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi_{n_\nu^{(2)}}(P_1) \text{ auch } \lim_{\nu=\infty} \varphi_{n_\nu^{(2)}}(P_2)$$

existiert. Das bei der Bestimmung der Serie $n_1^{(2)} < n_2^{(2)} < \ldots$ zu befolgende Prinzip ist dasselbe wie das bei der Bestimmung der ersten Serie befolgte, mit einem kleinen, aber wichtigen Unterschiede. Während wir die erste Serie aus der Grundserie 1, 2, 3 ... so bestimmten, daß 1 jedenfalls beibehalten wurde, sollen bei der Bildung der zweiten Serie aus der Serie $n_1^{(1)}, n_2^{(1)} \ldots$ die zwei ersten Zahlen $n_1^{(1)} = 1$ und $n_2^{(1)}$ jedenfalls aufgenommen werden, so daß wir also erhalten $n_1^{(2)} = 1$, $n_2^{(2)} = n_2^{(1)}$. Von der zweiten Serie können wir weiter zu einer dritten Serie übergehen, welche mit der zweiten in den drei ersten Zahlen übereinstimmt und für welche die drei Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi n_\nu^{(3)}(P_1), \quad \lim_{\nu=\infty} \varphi n_\nu^{(3)}(P_2), \quad \lim_{\nu=\infty} \varphi n_\nu^{(3)}(P_3)$$

existieren und, absolut genommen, $\leqq \mu$ sind. So ergibt sich schließlich vermöge dieses in infinitum wohl definierten Verfahrens eine unendliche Folge ganzer Zahlen

$$n_1^{(\infty)} = n_1, \quad n_2^{(\infty)} = n_2, \quad n_3^{(\infty)} = n_3, \ldots$$

wobei $n_1 = 1$, $n_2 = n_2^{(1)}$, $n_3 = n_3^{(2)}$, ... ist. Für diese Folge von Indexwerten existieren die unendlich vielen Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi n_\nu(P_\alpha) \quad [\alpha = 1, 2, 3, \ldots]$$

und zwar ist jeder derselben, absolut genommen, $\leqq \mu$.

Es soll nun der Nachweis geführt werden, daß die Reihe der Funktionen

$$\varphi n_1(x), \quad \varphi n_2(x), \quad \varphi n_3(x), \ldots$$

für die ganze Fläche Φ oder, präziser ausgedrückt, in jedem inneren nicht bis an die Grenze von Φ sich erstreckenden Teilgebiete von Φ gleichmäßig konvergiert. Um dieses zu beweisen, genügt es offenbar, diese Tatsache für jede ganz im Innern von Φ enthaltene schlichte Kreisfläche zu beweisen. (Windungsflächenstücke mit endlicher Ordnung des Windungspunktes lassen sich sofort auf schlichte Flächenstücke transformieren.)

Für eine solche Kreisfläche ist also zu zeigen, daß, wenn ν hinreichend groß gewählt ist,

$$|\, \varphi n_\nu(x) - \varphi n_{\nu+\nu'}(x) \,| < \varepsilon$$

ist, wobei ε eine beliebig klein gegeben zu denkende positive von null verschiedene Größe und ν' eine völlig beliebige positive ganze Zahl ist.

Um den Beweis dieser Behauptung zu führen, bemerken wir, das sämtliche Funktionen $\varphi n_1(x)$, $\varphi n_2(x)$, ... auch in einem Kreise

mit etwas größerem Radius und mit demselben Mittelpunkt noch existieren (— wenigstens dürfen wir uns auf die Betrachtung solcher Kreisflächenstücke beschränken —) und dem absoluten Betrage ihrer Werte nach unterhalb der Größe μ bleiben.

Die ganze Frage reduziert sich somit auf den Beweis des folgenden Satzes.

Lemma. Es seien $F_1(z)$, $F_2(z)$, ... unendlich viele analytische Funktionen von z, welche für $|z| \leqq 1 + \sigma$ $(\sigma > 0)$ regulär und eindeutig erklärt sind und deren Werte in diesem Gebiete sämtlich dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen von der Wahl des Index unabhängigen positiven Größe μ bleiben. Von diesen Funktionen sei ferner bekannt, daß für alle Punkte z, die einer im Innern des Einheitskreises erklärten daselbst überall dichten Punktmenge m angehören, der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} F_\nu(z)$ existiert. Alsdann konvergiert die Reihe der Funktionen $F_1(z)$, $F_2(z)$, ... im ganzen Innern und auf der Grenze des Einheitskreises gleichmäßig. —

Beweis: Sind z_1 und z_2 irgend zwei Punkte im Innern des Einheitskreises, so liefert die Cauchysche Integralformel für die Werte $F_\nu(z_1)$, $F_\nu(z_2)$ folgende Ausdrücke

$$F_\nu(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F_\nu(z')\,dz'}{z'-z_1}, \quad F_\nu(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F_\nu(z')\,dz'}{z'-z_2},$$

wobei die Integration über die Begrenzung des Kreises mit dem Radius $(1+\sigma)$ erstreckt werde. Also folgt

$$\frac{F_\nu(z_2)-F_\nu(z_1)}{z_2-z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F_\nu(z')\,dz'}{(z'-z_1)(z'-z_2)},$$

mithin

$$\left|\frac{F_\nu(z_2)-F_\nu(z_1)}{z_2-z_1}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mu\, 2\pi(1+\sigma)}{\sigma^2} = g.$$

Das Wesentliche ist, daß die für den Differenzenquotienten der Funktion $F_\nu(z)$ gefundene Abschätzungsgröße von z_1, z_2 und ν unabhängig ist.

Um die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge für das ganze Gebiet des Einheitskreises zu beweisen, ist darzutun, daß nach Angabe einer beliebig kleinen von null verschiedenen Größe ε eine Zahl N gefunden werden kann, so daß für alle $\nu \geqq N$ und beliebiges positives ganzzahliges ν' die Ungleichheit

$$|F_\nu(z) - F_{\nu+\nu'}(z)| < \varepsilon$$

besteht und zwar für das ganze Gebiet des Einheitskreises.

Bezeichnen wir die Differenz $(F_\nu(z) - F_{\nu+\nu'}(z))$ mit $F_{\nu,\nu'}(z)$, so bleibt der Differenzenquotient $\frac{F_{\nu,\nu'}(z_2) - F_{\nu,\nu'}(z_1)}{z_2 - z_1}$ dem absoluten Betrage nach unterhalb der von z_1, z_2 und ν, ν' unabhängigen Größe $2g$. Nun kann man wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Funktionenreihe $F_1(z)$, $F_2(z)$, ... in den Punkten der Menge m jedenfalls erreichen, daß der absolute Wert der Funktion $F_{\nu,\nu'}(z)$ für beliebig aber **endlich viele** willkürlich ausgewählte Punkte der Menge m kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird und zwar dadurch, daß man ν hinreichend groß wählt und ν' ganz beliebig läßt. Es sei m_1 die gewählte endliche Teilmenge von m, δ der weiteste Abstand, den ein variabel gedachter Punkt des Einheitskreises von der Menge m_1 haben kann, dann ergibt sich mit Benutzung der vorhin gewonnenen Abschätzung des Differenzenquotienten der Funktion $F_{\nu,\nu'}(z)$ eine Abschätzung dieser Funktion für das ganze Innere des Einheitskreises, nämlich

$$| F_{\nu,\nu'}(z) | \leqq \frac{\varepsilon}{2} + 2g \cdot \delta.$$

Nun ist ε beliebig klein gegeben, andererseits kann aber auch δ beliebig klein gemacht werden, etwa $< \frac{\varepsilon}{4g}$, indem die Menge m_1 passend gewählt wird. Man erhält dann $| F_{\nu,\nu'}(z) | < \varepsilon$ also wird die Funktion $F_{\nu,\nu'}(z)$ für das ganze Innere des Einheitskreises gleichmäßig **null**, sofern nur ν ins Unendliche wächst.

Hiermit ist das Lemma bewiesen und damit auch der pag. 13 formulierte dritte Hilfssatz.

Zuendeführung des ersten Beweises für das allgemeine Abbildungsprinzip mit Benutzung der vorstehenden drei Hilfssätze. Wir beschreiben innerhalb B_1 um den Punkt 0 eine einfach geschlossene Linie L_0, welche eine Umgebung λ_0 um den Punkt 0 herum abgrenzt. Das Gebiet λ_0 wird durch die Funktion $\varphi_1(x)$ auf ein Gebiet Σ abgebildet, welches den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält und den Nullpunkt ausläßt. Betrachten wir nun die Abbildung des Gebiets λ_0 durch die Funktion $\varphi n(x)$, so erhalten wir als Bild von λ_0 einen Bereich Σ', welcher mit dem Index n wechselt. Der zweite Hilfssatz (pag. 12) besagt, daß die Begrenzungslinie von Σ' nicht beliebig weit vom Nullpunkte sich entfernen kann. Präziser ausgedrückt: es gibt eine von n unabhängige Größe μ, sodaß $| \varphi n(x) | \leqq \mu$ für das Gebiet $(B_n - \lambda_0)$. Man hat ferner

$$\lim_{n=\infty} (B_n - \lambda_0) = B - \lambda_0.$$

Man kann also aus der Reihe der Funktionen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... nach dem dritten Hilfssatze eine gleichmäßig konvergente Folge auswählen. Die Grenzfunktion werde mit $\varphi(x)$ bezeichnet. Die gleichmäßige Konvergenz erstreckt sich zunächst nur auf das Gebiet $(B-\lambda_0)$ oder, genauer ausgedrückt, auf jedes ganz im Innern und nicht bis an die Grenze von $(B-\lambda_0)$ heranreichende Teilgebiet von $(B-\lambda_0)$. Insbesondere findet demnach auch gleichmäßige Konvergenz auf einer geschlossenen L_0 benachbart verlaufenden Linie L_0' statt, welche einen Bereich $\lambda_0' > \lambda_0$ begrenzt. Daraus folgt, weil wir es mit analytischen Funktionen zu tun haben, sofort die gleichmäßige Konvergenz der ausgewählten Funktionenreihe auch für das Gebiet λ_0', also auch für λ_0. Die Grenzfunktion $\varphi(x)$ ist demnach für das ganze Gebiet B erklärt und wird nur im Punkte 0 unstetig, nämlich wie $\frac{1}{x-x_0}$. Hierin liegt zugleich die Tatsache ausgedrückt, daß die erhaltene Grenzfunktion *sich nicht auf eine Konstante reduziert*.

Daß die Grenzfunktion $\varphi(x)$ eine konforme Abbildung der Fläche B auf ein schlichtes Gebiet vermittelt, ergibt sich sofort daraus, daß jede der Funktionen $\varphi_n(x)$ eine derartige konforme Abbildung vermittelt und daß, wie gesagt, die Funktion $\varphi(x)$ sich *nicht auf eine Konstante reduziert*.

Zweiter Beweis des allgemeinen Abbildungsprinzips für unendlich-vielfach zusammenhängende Bereiche [1]).

Wir bilden der Reihe nach die Bereiche $(B_n - \lambda_0)$, deren keiner den Punkt 0 enthält, umkehrbar eindeutig und konform auf je einen schlichten ganz im Endlichen liegenden Bereich ab, welcher als äußere, L_0 entsprechende Begrenzungslinie den Einheitskreis hat und den Nullpunkt ausschließt [2]). Dann sind die abbildenden

1) Zugleich als neuer Beweis des Abbildungssatzes für einfach bezw. endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche.

2) Zu einer solchen Abbildung gelangt man durch Anwendung des ersten Hilfssatzes. Um die gewünschte Begrenzunglinie als Einheitskreis zu normieren, hat man nachträglich noch den gewöhnlichen auf schlichte einfach zusammenhängende analytisch begrenzte Bereiche sich beziehenden Abbildungssatz anzuwenden. (Vgl. Jahresbericht der D. M. V., 1907, pag. 126, Beweis des Satzes IX.) Das Wesentliche für den folgenden Beweis ist übrigens nur dieses, daß die



Funktionen lauter Funktionen, deren Werte offenbar dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ sind. Folglich kann man nach dem dritten Hilfssatze eine gleichmäßig konvergente Serie auswählen. Die Grenzfunktion leistet eine konforme Abbildung der Fläche $(B-\lambda_0)$ auf ein schlichtes Gebiet, sofern diese Grenzfunktion sich nicht auf eine Konstante reduziert. Das Letztere ist in der Tat nicht möglich. Gesetzt nämlich, wir bekämen als Grenzfunktion der ausgewählten Serie eine Konstante, dann würden sich die Werte der Abbildungsfunktionen längst der Linie L_0' (s. pag. 18 oben) ebenfalls auf eine Konstante reduzieren. Nun geht L_0' bei jeder der betrachteten Abbildungen in eine den Nullpunkt einfach umschließende Linie über, also müßte die Konstante, auf welche sich die Werte der Abbildungsfunktionen schließlich reduzieren, die Null sein. Das bedeutet mit Rücksicht auf die gleichmäßige Konvergenz der ausgewählten Serie folgendes: Bei den sukzessiven konformen Abbildungen geht das zweifach zusammenhängende Gebiet zwischen L_0 und L_0' in ein schlichtes zweifach zusammenhängendes Gebiet über, dessen äußere Begrenzungslinie der Einheitskreis ist, während die innere Begrenzungslinie eine mit wachsendem Index sich auf den Nullpunkt zusammenziehende Linie ist. Das ist aber nicht möglich, weil der zweifach zusammenhängende Bereich zwischen L_0 und L_0' einen ganz bestimmten endlichen Modul besitzt, welcher gegenüber umkehrbar eindeutigen konformen Abbildungen invariant ist, also auch den erwähnten schlichten Bildbereichen zukommen müßte. Nun gilt aber folgender Satz.

Vierter Hilfssatz: Es sei $\overline{B}$ ein schlichter zweifach zusammenhängender Bereich, dessen äußere Begrenzungslinie vom Einheitskreise und dessen innere Begrenzungslinie von einer den Nullpunkt einfach umschließenden L gebildet wird. Die weiteste Entfernung eines auf L veränderlich gedachten Punktes vom Nullpunkte sei gleich Δ; dann ist der Modul des Bereichs $\overline{B}$ größer oder gleich $\frac{1}{\Delta}$. Insbesondere wird also der Modul unendlich groß, wenn Δ unendlich klein wird.

Beweis: Den Modul eines beliebig gegebenen zweifach zusammenhängenden Bereichs definieren wir als das Radienverhältnis (Radius des äußeren durch Radius des inneren Begrenzungskreises)

äußeren, L_0 entsprechenden Begrenzungslinien der schlichten Bildbereiche von $(B_n-\lambda_0)$ sämtlich in einem gewissen von n unabhängigen endlichen Bezirk liegen, dessen Abstand vom Nullpunkte von null verschieden ist.

desjenigen von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs, auf welchen der betrachtete gegebene Bereich umkehrbar eindeutig und konform abgebildet werden kann. Gefunden wird der Modul in folgender Weise: Man konstruiere diejenige in dem gegebenen Bereich eindeutige und reguläre Potentialfunktion u, welche auf der einen (ersten) Begrenzungslinie verschwindet, auf der andern den Wert eins annimmt; der Wert $\int \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$, — das Integral genommen über die vollständige erste Begrenzungslinie $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} = \text{Ableitung in Richtung der inneren Normalen, } d\sigma = \text{positives Linienelement}\right)$ —, hat einen positiven von null verschiedenen Wert C; wir bezeichnen mit v die zu u gehörende konjugierte Potentialfunktion, dann vermittelt die Funktion $e^{\frac{(u+iv)\cdot 2\pi}{C}}$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des gegebenen Bereichs auf einen schlichten von konzentrischen Kreisen begrenzten Ring mit dem Radienverhältnis $e^{\frac{2\pi}{C}}$. Die Größe $e^{\frac{2\pi}{C}}$ stellt den Modul des gegebenen Bereichs dar.

Aus der vorstehenden Definition des Moduls, welche übrigens die Invarianz desselben gegenüber umkehrbar eindeutigen konformen Abbildungen sofort erkennen läßt, ergibt sich nun, daß der Modul des Bereichs $\overline{B}$ größer ist als der Modul desjenigen schlichten Kreisrings, welcher vom Einheitskreise und von dem mit ihm konzentrischen Kreise vom Radius $\varDelta$ begrenzt wird. Der Modul dieses Kreisrings ist aber gleich $\frac{1}{\varDelta}$ [1]).

Nachdem auf diese Weise eine konforme Abbildung des Bereichs $B - \lambda_0$ auf ein schlichtes Gebiet innerhalb des Einheitskreises gefunden [2]) ist, kann man den Bereich B selbst als Teilbereich eines

---

1) Vgl. einen von mir in der Arbeit „Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche", (Jahresbericht der D. M. V. 1907, pag. 117—118) bewiesenen Satz: Ist S ein zweifach zusammenhängender schlichter Bereich, welcher ganz innerhalb eines andern schlichten Bereichs T liegt derart, daß, allgemein zu reden, der Bereich T durch die Begrenzungslinien von S in drei zweifach zusammenhängende Bereiche zerlegt wird, so ist der Modul von S kleiner als der Modul von T.

2) Es ist nicht notwendig, sich davon Rechenschaft zu geben, daß vermöge

idealen geschlossenen einfach zusammenhängenden Bereichs auffassen, welcher entsteht, wenn man sich von dem erwähnten schlichten Gebiet alle inneren Begrenzungen fortdenkt. Bei der konformen Abbildung der gefundenen idealen geschlossenen Fläche auf die schlichte Fläche einer Vollebene geht der Bereich B in einen schlichten Bereich über.

Schlussbemerkungen.

Der schlichte Bereich, auf welchen der Bereich B gemäß unserem im Vorhergehenden bewiesenen allgemeinen Abbildungsprinzip umkehrbar eindeutig und konform abgebildet werden kann, ist selbstverständlich im allgemeinen auf unendlich viele Weisen wählbar. Man kann darnach streben, ihn in bestimmter Weise zu normieren.

Ist der Bereich endlich vielfach zusammenhängend, so kann man ihn als einen von lauter Vollkreisen begrenzten Bereich normieren, wobei der einzelne Kreis sich ev. auf einen Punkt reduzieren kann. Der zu einem gegebenen Bereiche solcherweise gehörende Kreisbereich kann durch ein gleichmäßig konvergentes iterierendes Verfahren gefunden werden, welches ich in einer Voranzeige (Gött. Nachrichten, 1908, pag. 112 ff.) mitgeteilt habe. Man kann zu diesem Kreisbereiche aber auch gelangen durch eine Anwendung unseres allgemeinen Abbildungsprinzips für unendlich-vielfach zusammenhängende Bereiche. Die betreffende unendlich-vielfach zusammenhängende Fläche, deren umkehrbar eindeutige konforme Abbildung auf einen schlichten Bereich zugleich die gewünschte konforme Abbildung des gegebenen endlich-vielfach zusammenhängenden Bereichs auf einen Kreisbereich liefert, entsteht aus dem gegebenen Bereiche auf ganz analoge Weise, wie aus dem gesuchten (unbekannten) Kreisbereiche durch

der durch die Grenzfunktion vermittelten Abbildung der Linie L_0 in regulärer Weise die Peripherie des Einheitskreises entspricht, da jedenfalls L_0' regulär analytisch auf eine reguläre Linie innerhalb des Einheitskreises bezogen ist; letzteres genügt für die Anwendung der Methode der gürtelförmigen Verschmelzung. Uebrigens kann man sich leicht überzeugen, daß die Konvergenz der ausgewählten Serie tatsächlich auch auf L_0 selbst noch gleichmäßig stattfindet; man hat sich zu dem Zwecke einer Spiegelung an L_0 bezw. am Einheitskreise zu bedienen; erstere Spiegelung kann auch durch einen Uebergang auf die Rückseite des Bereichs $(B - \lambda_0)$ ersetzt werden.

den in infinitum wiederholten Spiegelungsprozeß (Spiegelung an den Begrenzungskreisen) in bekannter Weise ein gewisser unendlich-vielfach zusammenhängender Bereich mit unendlich vielen diskreten Grenzpunkten hervorgeht. Der Spiegelung an einem Kreise lassen wir bei dem gegebenen Bereiche den Uebergang von der Vorderseite auf die Rückseite dieses Bereiches entsprechen oder umgekehrt.

Man darf vermuten, daß auch für unendlich-vielfach zusammenhängende schlichte Bereiche der Satz gilt, daß jeder derartige Bereich auf eine und, abgesehen von einer linearen Transformation, nur eine Weise als Kreisbereich normiert werden kann. Der Nachweis dieses allgemeinen Kreisnormierungsprinzips läßt sich, wenn der gegebene schlichte unendlich-vielfach zusammenhängende Bereich, dessen Normierung ausgeführt werden soll, in Bezug auf die Axe des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist und wenn die Begrenzungslinien alle die Axe des Reellen treffen, im wesentlichen nach derselben Methode erledigen, nach welcher ich diesen symmetrischen Fall unter der Voraussetzung endlichen Zusammenhanges an anderer Stelle erledigt habe[1][2].

---

1) „Ueber die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche". Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1907, pag. 116 ff.

2) Das von Herrn Klein (Math. Annalen, 21) u. a. aufgestellte der „Ineinanderschiebung" mehrerer Grenzkreisfundamentalpolygone entsprechende „Fundamentaltheorem" der Uniformisierung algebraischer Funktionen ist ein vortreffliches Beispiel für das von uns formulierte allgemeine Kreisnormierungsprinzip. Unser allgemeines Abbildungs- bezw. Uniformisierungsprinzip allein, in diesem Falle angewandt, gibt nur eine qualitative Lösung.

Hingegen läßt sich beispielsweise bei denjenigen Kleinschen Fundamentaltheoremen, zu welchen man durch Ineinanderschiebung der elementaren loxodromischen, parabolischen, elliptischen Fundamentalbereiche gelangt, durch eine besondere Untersuchung dartun, daß in diesen Fällen die durch das allgemeine Uniformisierungsprinzip gewährleistete qualitative Lösung zugleich auch die quantitative Lösung darstellen muß. (Vgl. die bereits oben erwähnte demnächst in den Math. Ann. erscheinende Abhandlung des Verfassers: „Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven. (Imaginäre Substitutionsgruppen)" sowie die oben ebenfalls erwähnte später erscheinende gleichbetitelte Mitteilung, Gött. Nachr., 1909.

Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die schlichte ebene Fläche eines Kreises.

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn F. Klein in der Sitzung am 19. Dezember 1908.

Auf das Problem, die Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke umkehrbar eindeutig und konform (im Eckpunkte selbst nur stetig) auf die schlichte ebene Fläche eines Kreises abzubilden, wurde von Herrn H. A. Schwarz in seiner Abhandlung „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen" (Berliner Monatsberichte, 1870, pag. 767–795, s. insbesondere pag. 785) hingewiesen. Die Bedeutung dieses Problems innerhalb der Riemannschen Abbildungstheorie ist bekannt; die Lösung dieses Problems hat nämlich vermöge der Schwarz-Neumannschen kombinatorischen Methoden gemäß der von Herrn Klein (Math. Annalen, Bd. 21, 1883, „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionstheorie") entwickelten allgemeinen Idee der „Riemannschen Mannigfaltigkeit" die Richtigkeit des Satzes zur Folge, daß jeder im Raume gegebenen aus endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten geschlossenen Fläche im Riemannschen Sinne eine irreduzible algebraische Gleichung $G(x, y) = 0$ zwischen zwei komplexen Veränderlichen x und y zugeordnet werden kann, welche durch jede mit ihr birational verknüpfte Gleichung ersetzt werden darf.

Das genannte Problem der Eckenabbildung ist bis jetzt unerledigt geblieben. In dem speziellen Falle, in welchem die zur Bildung der Ecke benützten Flächen Kugelflächen bezw. Ebenen sind, ist die Lösung bereits Herrn Schwarz bekannt gewesen; die konforme Abbildung gelingt unter dieser Annahme auf elementare Weise.

Die von mir in meinen Arbeiten „Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“ (erste, zweite und dritte Mitteilung) (Göttinger Nachrichten 1907 und 1908) entwickelten ganz allgemeinen Abbildungssätze gestatten nun als eine Anwendung auch die Lösung des allgemeinen Eckenabbildungsproblems.

Betrachtet man nämlich die Umgebung des Eckpunktes unter Ausschluß des Eckpunktes selbst, so stellt diese Umgebung ein zweifach zusammenhängendes Flächenstück dar, für welches um jeden seiner inneren Punkte eine umkehrbar eindeutig auf eine schlichte ebene Kreisfläche abbildbare Umgebung abgegrenzt werden kann; auch für die Punkte einer von zweien der gegebenen regulären analytischen Flächenstücke gebildeten Kante hat dies keine Schwierigkeit [1]). Das genügt aber, um das von mir in der dritten Mitteilung dargelegte „allgemeine Abbildungsprinzip“ anwenden zu können. Die erwähnte zweifach zusammenhängende Umgebung des Eckpunktes kann demnach umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche eines schlichten ebenen Kreisrings abgebildet werden, dessen einer Begrenzungskreis, wie nachträglich bewiesen werden kann, sich notwendig auf einen Punkt reduzieren muß. Dieser Punkt entspricht dann in stetiger Weise dem Eckpunkte.

Eine ausführlichere Darlegung meiner Lösung des Problems der Eckenabbildung und verwandter Probleme beabsichtige ich an anderer Stelle folgen zu lassen [2]).

---

1) Vgl. Schwarz l. c.

2) Von der hier bezeichneten Lösung des Problems der Eckenabbildung habe ich bereits im Mai 1907 in der Mathematischen Gesellschaft zu Göttingen Mitteilung gemacht im Zusammenhange mit der Mitteilung des von mir um dieselbe Zeit gefundenen ersten Beweises für die Abbildung eines beliebigen, unendlich-vielblättrigen einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines schlichten Kreises bezw. auf die ganze schlichte Ebene.

Ordentliche Sitzung am 9. Januar 1909.

E. Schröder legt vor: W. Brecht, Ein unbekanntes Gedicht von Wilhelm Heinse. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium. XXI. (Erscheint in den Nachrichten, math.-phys. Kl.)

Ordentliche Sitzung am 23. Januar 1909.

F. Klein legt Heft V, 3, 1 der Mathematischen Encyklopädie vor.

K. Schwarzschild, Aktinometrie der Zone 0° bis +20° Decl. I. Teil. (Erscheint in den Abhandlungen, math.-phys. Kl.)

L. Morsbach legt vor: F. Roeder, Zur Deutung der ags. Glossierungen von paranymphus und paranympha. Ein Beitrag zur Kenntnis des ags. Hochzeitsrituals. (Erscheint in den Nachrichten, phil.-hist. Kl.)

Für die Redaktion verantwortlich: F. Leo, d. Z. vorsitzender Sekretär d. Kgl. Ges. d. Wiss.

Ausgegeben am 13. Februar 1909.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).



